图　论

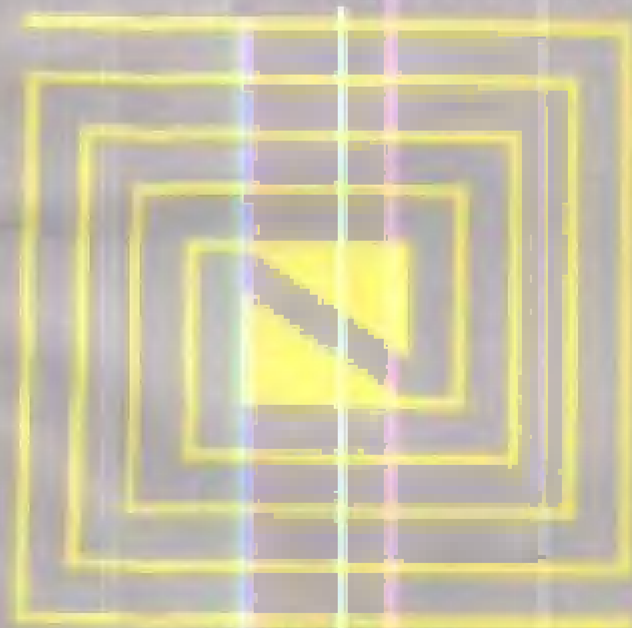


图　论

陈子岐　朱必文　刘峙山　编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书为图论的入门教材．全书分十章：图的定义和例子，路和圈，树，平面图，匹配．独立集和团，图的着色，有向图．网络流，图的矩阵表示与向量空间．

本书基本概念的陈述准确清晰，定理的证明和内容的编排严谨完整，行文流畅通达．

本书可作为高等学校理科图论课程的选修教材．

图 论

陈子岐 朱必文 刘峙山 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 7.75 字数 190 000

1990 年5月第1版 1990 年5月第1次印刷

印数 0001—2 450

ISBN 7-04-002838-7/O·397

定价 1.90 元

目　录

前　言

图论是数学中一个既古老又年轻的分支．欧拉1736年关于柯尼希堡（Königsberg）七桥问题的论文标志着图论的诞生，至今已历时二百五十余年．从二十世纪五十年代开始，由于运筹学、计算机科学等学科的促进，人们对图论产生了浓厚的兴趣．近四十年来，无论就其自身理论的发展还是实际应用的深度和广度来讲，图论正经历着一个蓬勃发展的时期，表现了一切年轻的学科所具有的那种强大的生命力．在国外，图论已成为计算机科学系、运筹系、组合优化系、电机系等系科的基础课程之一，许多学校的数学系也把图论列入选修课的范围．

本书是图论的入门教材．全书共分十章，所涉及的都是图论中最基本、最常见的内容．图论虽然具有明显的直观背景，但作为一个数学分支，它是严谨的．因此，对基本概念我们力求陈述得准确清晰，对定理的证明和内容的编排力求严谨完整，并努力做到行文的流畅通达．除了求最短路的戴克斯特拉（Dijkstra）算法，最优树的克拉斯卡（Kruskal）算法等几个常见的算法外，本书很少涉及算法问题．书中还介绍了近年来得到的某些重要而有趣的结果．在2.2节中写进了麦基（Mckee）不久前获得的关于欧拉图的一个新充要条件；4.2节中介绍了由罗伯逊（Robertson）和塞姆尔（Seymour）得到的关于库拉脱夫斯基定理的十分重要的推广；7.3节中介绍了四色问题的历史以及阿佩尔（Appel）和哈肯（Haken）的结果．每一节的后面都附有数目不等的习题，对于某些较繁难的习题给出了提示．

近年来，我们曾多次讲授图论课，参阅了好些国外的教材，书中写进了我们点滴的体会与经验．由于学识有限，经验不足，相信一定有不少的错误与疏漏，我们诚恳希望听到大家的批评意见．

新疆大学张福基教授，郭晓峰副教授仔细审阅了原稿，并提出了许多宝贵意见，谨在此向他们致以深切的谢意。

在本书写作过程中，我们得到内蒙古科学基金的支持，对此深致谢忱。

编　者

一九八八年秋于呼和浩特

第一章　图的定义和例子

1.1　基本概念

许多实际问题引出抽象的图的概念．考虑图 1.1 和 1.2，图 1.1中画出的是某个电网络的一部分，P、Q、R、S、T是线路的连接点；图 1.2 是一个局部的交通图，P、Q、R、S、T 是道路的交汇点，路PS 和 QT 立体交叉．

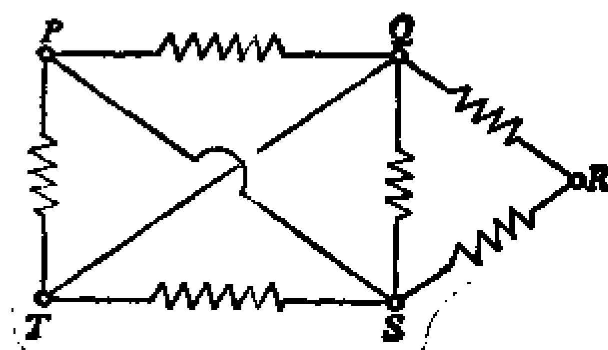


图 1.1

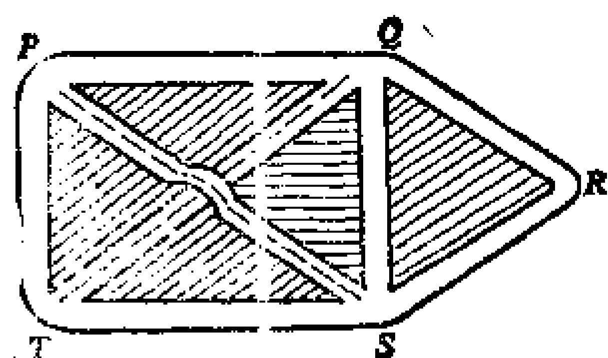


图 1.2

显然，这两个图都可用图 1.3 中的顶点和边之间的关系来表示，这样得到的就是一个图．

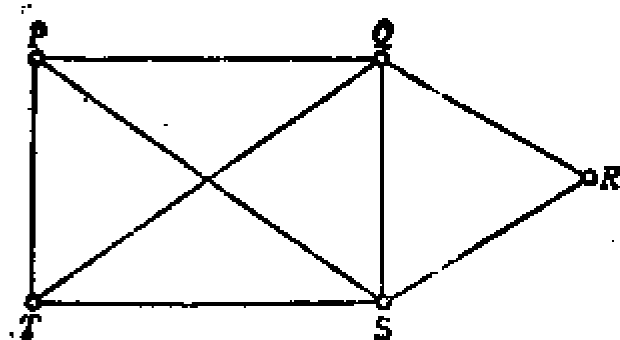


图 1.3

应当注意的是，图 1.3 中的边 PS 和 QT 虽然相交，但它们的交点并不是图的顶点．这是因为 PS 和 QT 的交点不与图 1.1 中线路的连接点或 1.2 中道路的交汇点相对应．图 1.3 中描述的情形还可给以其它的解释；例如，顶点P、Q、R、S、T可以看成五个人，两顶点间有边相连表示两人相互认识(因此，P 和 Q 认识，但 P 和 R 却不认识)；顶点 P、Q、R、S、T也可以看成五支球队，两顶点间有边相连表示两个球队间有一场比赛．等等．

上面谈到的各种情况显然也可用图 1.4 来描绘．这时边 PS 画在矩形 $PQST$ 之外，从而 PS 和QT 不相交．我们感兴趣的是在哪些点之间有边相连，至于度量性质，例如边到底是直线还是曲线，边的长度等等却是无关紧要的．

一般说来，如果我们感兴趣的是一些对象的两两间存在的某

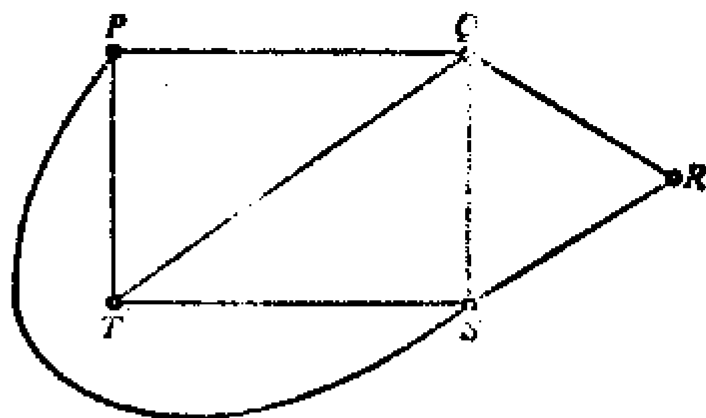


图 1.4

种关系，那么这些对象及对象间的这种关系就可以抽象成一个图。以下正式给出图的定义。

图 G 是指一个有序的三元组 $(V(G), E(G), \Psi_G)$，这里的 $V(G)$ 和 $E(G)$ 是互无公共元素的集合且 $V(G)$ 非空，Ψ_G 称为**关联函数**，它使 $E(G)$ 中的每一个元素对应于 $V(G)$ 中元素的**无序偶**（偶中的元素可能相同）。$V(G)$ 称为图 G 的**顶点集**，其中的元素称为图 G 的**顶点**。$E(G)$ 称为图 G 的**边集**，其中的元素称为图 G 的**边**。如果 $\Psi_G(e)=\{u,v\}$，即 Ψ_G 使边 e 与顶点的无序偶 $\{u,v\}$ 相对应，则称边 e **连接** u 和 v，而 u 和 v 称为 e 的**端点**。我们用例子来说明图的概念。

例 1 $G=(V(G), E(G), \Psi_G)$

$V(G)=\{u,v,w,x\}$

$E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9\}$

$\Psi_G(e_1)=\{u,v\}, \Psi_G(e_2)=\{v,v\}, \Psi_G(e_3)=\{v,v\}$

$\Psi_G(e_4)=\{v,w\}, \Psi_G(e_5)=\{v,w\}, \Psi_G(e_6)=\{u,w\}$

$\Psi_G(e_7)=\{u,w\}, \Psi_G(e_8)=\{u,w\}, \Psi_G(e_9)=\{w,x\}$

G 是有四个顶点九条边的图。如果顶点用小圆圈来表示，而边用连接两个顶点的一条线来表示，就可以形象地把图描绘出来（图 1.5）。

为简单起见，把 $\Psi_G(e)=\{u,v\}$ 简化为 $e=uv$，表示 e 是以 u 和

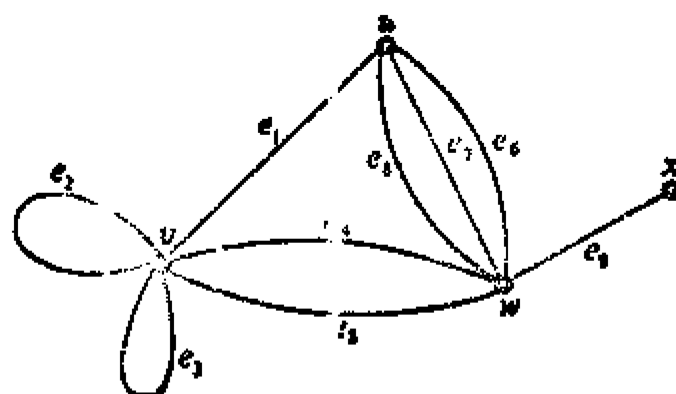


图 1.5

v为端点的边．两个端点重合的边 $e=vv$ 称为顶点 v 上的一个环．端点不同的边称为连杆．例 1 中 e_2、e_3 是顶点 v 上的环，而其余的边全是连杆．例 1 中形如 vw 的连杆不止一个，这时称有重边连接 v 和 w．如果形如 uv 的连杆在图 G 中总共有 k 个，则称有 k 重边连接 u 和 v．例 1 中有 2 重边连接 v 和 w，有 3 重边连接 u 和 w．

为了书写方便，下文中通常把图 $G=(V(G),E(G),\Psi_G)$ 简记为 $G=(V(G),E(G))$，这时只需把 $E(G)$ 中的边用它的两个端点表示出来．用这种表示方法，例 1 中的图可以记为

$$G=(V(G),E(G))$$
$$V(G)=\{u,v,w,x\}$$
$$E(G)=\{uv,vv,vv,vw,vw,uw,uw,uw,wx\}$$

需注意的是，在这种记号下 $E(G)$ 中有些边重复出现，例如在例 1 的情形 uw 出现 3 次，这表示图 G 中共有 3 条以 u 和 w 为端点的边，或有 3 重边连接 u 和 w．

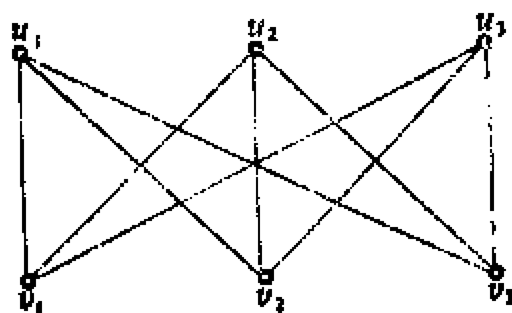
正如例 1 中的图可以用图1.5中的图形来描绘那样，只要把图的顶点用平面上的点（通常用小圆圈标记）来表示，而图的边用连接对应的点的线来表示，就得到图的图形．图论中的许多术语都是从图的这种图形表示自然导出的．图的图形表示使得抽象定义的图具有直观性，有助于我们进行思考和理解图的性质．显然，同一个图可以有许多外表不同的图形表示．考虑

例 2 $G=(V(G),E(G))$

$$V(G)=\{u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,v_3\}$$
$$E(G)=\{u_1v_1,u_1v_2,u_1v_3,u_2v_1,u_2v_2,u_2v_3,u_3v_1,u_3v_2,u_3v_3\}$$

图 1.6 中的两个图形都是例 2 中的图的图形表示．

我们经常把图和代表它的图形等同起来，称图形中的点为图



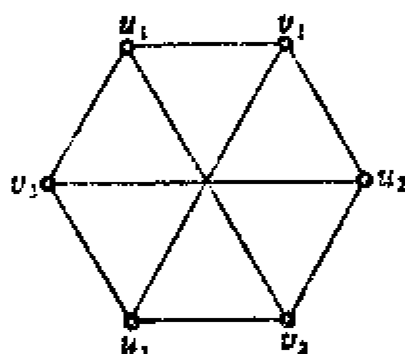


图 1.6

的顶点，图形中的连线为图的边。注]

如果图的顶点集和边集都只含有限多个元素，则称图 G 是有限图。如果不特别声明，本书中所指的图都是允许有重边和环的有限图。

如果图中没有重边和环，则称为简单图。图 1.7 就是一个简单图，它的顶点集是 $\{u,v,w,x\}$，而边集是 $\{uv,vw,wu,wx\}$。在多数情况下图论中研究的都是简单图。

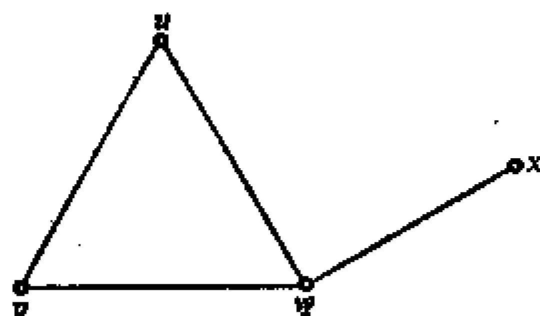


图 1.7

如果顶点 v 和 w 是图 G 中某一条边的两个端点(即 G 中有形如 vw 的边)，则我们说 v 和 w 相邻。如果顶点 u 是边 e 的端点，则称顶点 u 和边 e 关联，同时也称边 e 和顶点 u 关联。如果图中的两条边有相同的顶点，则我们说这两条边是相邻的。

集合 S 的基数用 $|S|$ 表示；当 S 有限时，$|S|$ 表示 S 中元素的个数。

[注] 在画一个图的图形的时候，约定代表图的边的曲线不自交且不通过图中不是这条边的端点的其它的顶点。显然这总是可以办到的。

用 $\nu(G)$ 和 $\varepsilon(G)$ 分别表示图 G 的顶点数和边数，即 $\nu(G)=|V(G)|$，$\varepsilon(G)=|E(G)|$．$\nu(G)$ 又称为图的阶．本书中字母 G 一般用来表示图．如果叙述中只涉及一个图，这个图一般记成 G．在不引起混淆的场合，$V(G)$、$E(G)$、$\nu(G)$、$\varepsilon(G)$ 分别简记为 V、E、ν、ε．

图 G 的顶点 v 的度定义为和 v 相关联的边的数目，记为 $d_G(v)$．在不致混淆的场合，简记为 $d(v)$．顶点 v 上的一个环相当于与 v 关联的两条边，因此约定它对顶点 v 的度的贡献为 2．对于例1中的图（参看图 1.5）$d(u)=4$，$d(v)=7$，$d(w)=6$，$d(x)=1$．满足 $d(v)=1$ 的顶点称为悬挂点．满足 $d(v)=0$ 的顶点称为孤立点．以 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 记图 G 中顶点的度的最大值和最小值，分别称为 G 的最大度和最小度．最大度和最小度简记为 Δ 和 δ．对于例 1 中的图 G，$\delta(G)=1$，$\Delta(G)=7$，点 x 是悬挂点．

图 G 的每一条边都有两个端点，因此任一条边对它的两个端点的度各贡献 1（点 v 上的环对点 v 的度的贡献为 2），从而任何一条边对于图 G 的各个顶点的度的总和的贡献为 2．因此得到

定理 1.1 $\sum\limits_{v\in V} d(v)=2\varepsilon$，

即图 G 的各个顶点的度的总和等于边数的 2 倍．这个定理有时也称为握手引理，这是由于如果把图中的顶点理解为参加某个集会的成员，把一条边理解为它的两个端点代表的成员握过一次手．那么定理 1.1 中等式的左端表示按每人计算的握手次数的总和，右端则表示集会上总共的握手次数的 2 倍．（握手一次表示集会中的两个人相互握手一次．）

由定理 1.1 可以得到

推论 1.2 任何图 G 中度为奇数的顶点的数目为偶数．

证　以 V_1 和 V_2 分别表示图 G 中度为奇数和偶数的顶点的集合．由于

$$\sum_{v\in V_1} d(v) + \sum_{v\in V_2} d(v) = \sum_{v\in V} d(v) = 2e$$

为偶数，又因 $\sum_{v\in V_2} d(v)$ 为偶数，故 $\sum_{v\in V_1} d(v)$ 也是偶数，于是 $|V_1|$ 是偶数. □.

现在引进图同构的概念. 如果能够在图 G_1 和 G_2 的顶点集 $V(G_1)$ 和 $V(G_2)$ 之间建立一一对应关系，使得连接 G_1 的任何一对顶点的边的数目与连接 G_2 中与之相应的一对顶点的边的数目相同，则称 G_1 和 G_2 是**同构的**，而前述顶点间的一一对应称为 G_1 与 G_2 间的**同构对应**. 例如，图 1.8 中的 G_1 与 G_2 就是两个同构的图.

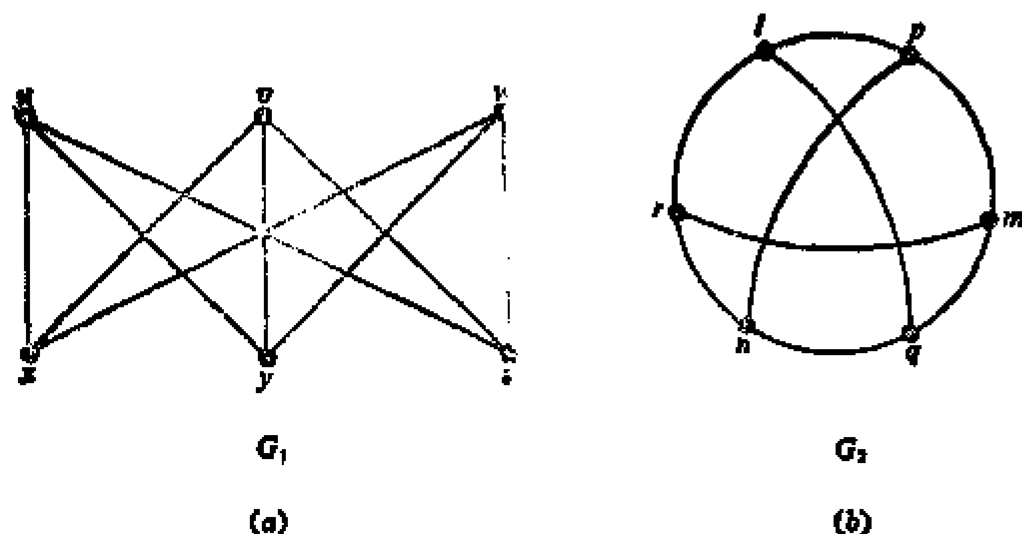


图 1.8

事实上 $u\leftrightarrow l$，$v\leftrightarrow m$，$w\leftrightarrow n$，$x\leftrightarrow p$，$y\leftrightarrow q$，$z\leftrightarrow r$ 就是 G_1 与 G_2 间的同构对应. 两个同构的图实质上是一样的，只是顶点和边的标记不同. 图 G_1 和 G_2 同构记为 $G_1 \cong G_2$.

如果图 H 和 G 满足 $V(H)\subseteq V(G)$，$E(H)\subseteq E(G)$，则称图 H 是图 G 的**子图**，而 G 是 H 的**母图**，记为 $H\subseteq G$. 如果 $H\subseteq G$，又 $H\neq G$，则称 H 是 G 的**真子图**. 记为 $H\subset G$. 如果 $H\subseteq G$，又 $V(H)=V(G)$，则我们说 H 是 G 的**支撑子图**，而 G 是 H 的**支撑母图**. 如果去掉图 G 中的一切环，又若 G 中有重边，对于连接任

何一对顶点的重边，除保留一条外、去掉重边中余下的一切边，这样得到的图 G 的简单子图 H 称为图 G 的**底图**. 图1.7就是图1.5的底图.

任何一个图 G 都有一个 $\nu\times\varepsilon$ 矩阵与它对应，称为图 G 的**关联矩阵**. 把 G 的顶点记为 v_1、$v_2,\cdots,v_\nu$，G的边记为 $e_1,e_2,\cdots,e_\varepsilon$，则 G 的关联矩阵 $M(G)=[m_{ij}]$中 i 行 j 列处的元素 m_{ij} 表示顶点 v_i 与边 e_j 关联的次数. 即如果 e_j 与 v_i 不关联，则 $m_{ij}=0$；如果 e_j 是一条连杆且与 v_i 关联，则 $m_{ij}=1$；如果 e_j 是 v_i 上的环，则$m_{ij}=2$.

邻接矩阵 $A(G)=[a_{ij}]$是另一个和图G有关的矩阵. 这是一个 $\nu\times\nu$ 矩阵，a_{ij} 是连接顶点 v_i 和 v_j 的边数. 例 1 中的图(图1.5)的关联矩阵和邻接矩阵分别为

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
u	1	0	0	0	0	1	1	1	
v	1	2	2	1	1	0	0	0	
w	0	0	0	1	1	1	1	1	
x	0	0	0	0	0	0	0	0	

$M(G)$

(a)

	u	v	w	x
u	0	1	3	0
v	1	2	2	0
w	3	2	0	1
x	0	0	1	0

$A(G)$

(b)

图 1.9

我们已经引进了好些与图有关的基本定义，在结束这一节的时候介绍一个可借助于图的概念求解的有趣的问题.

有四个大小一样的立方体，记为 C_1、C_2、C_3、C_4. 又 Y、R、B、G 分别表示黄、红、蓝、绿四种颜色. 假定立方体的六个面都染上了这四种颜色中的某一种颜色，又每一立方体上四种颜色全都出现. 考虑下面的问题：怎样把立方体一个一个地叠起来使之成为一个底为正方形的四棱柱，要求棱柱的每一侧面都由黄、红、蓝、绿四种颜色的面拼凑而成.

首先指出，不是在任何情况下上述问题都有解．例如把每个立方体中有公共顶点的某三个面都染成红色，其余的三个面染成黄、蓝、绿，则无论怎样叠放立方体，棱柱的侧面上将出现八块红色的正方形，而满足要求的棱柱的侧面只可能出现四块红的正方形，因此这时不可能有解．以下是在解存在的假定下来求解．

如果只凭试验而无一定的指导原则，要叠出合乎要求的棱柱是非常困难的．最下层的立方体共有三种不同的摆法（设想立方体有上下、左右、前后三条轴，这三种摆法各相当于取这三条轴中的一条与放置立方体的平面垂直），而对于放在上层的三个立方体，每一个有 24 种放法（立方体有六个面，每一个面都可以放来与下一层立方体的顶面叠合，此外还可通过旋转得到四种不同的放法），因此，一共有 $3\times24^3=41472$ 种不同的叠置方法．显然，只凭试验很难找到答案．

为了求出问题的解，每一个立方体的染色方式用一个四顶点的图来表示．这四个顶点分别记为 Y、R、B、G（即黄、红、蓝、绿）；两顶点间有边相连的充要条件是立方体中恰有一对平行的面的颜色正好是这两个顶点所代表的颜色．因此每一个立方体对应于一个恰有三条边的图．图 1.10 中画出四个已染色的立方体和与它们分别对应的图；图 1.10 中与立方体 C_i 对应的边给以编号 i $(1\leqslant i\leqslant4)$．把 1.10 中的四个图叠放在一起，即得图 1.11．

设想已经得到问题的解．考虑棱柱相对的两个侧面，共由八个正方形组成，分属于四个立方体，且每个立方体恰有两个平行的正方形（面）属于这一对侧面．棱柱的每一个侧面恰由 Y、R、B、G 四色的正方形组成．棱柱的这一对侧面在图1.11中对应于一个由编号为 1、2、3、4 的四条边构成的支撑子图，且每一个顶点的度为 2．棱柱的另一对侧面也对应于这样的一个子图．

反之不难看出：如果与四个立方体相伴随的图中有两个互无公共边的支撑子图，每一个支撑子图都由编号为 1、2、3、4 的四条

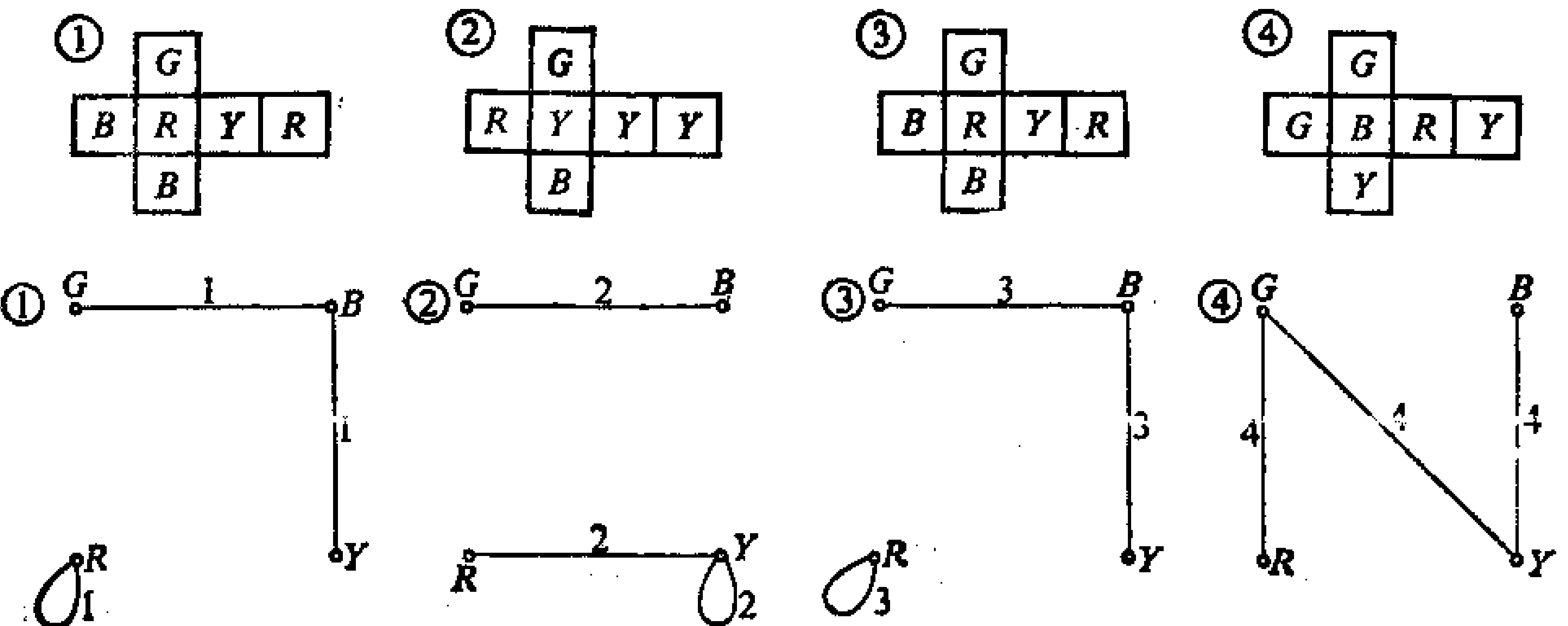

①
G
B R Y R
B
②
G
R Y Y Y
B
③
G
B R Y R
B
④
G
G B R Y
Y
① G 1 B 1 Y R 1
② G 2 B R 2 Y 2
③ G 3 B 3 Y R 3
④ G B R Y 4 4 4

图 1.10

边组成，且每个顶点的度为 2，则问题有一个相应的解.

对于图 1.11，可得图 1.12 中的两个子图. 从这两个子图出发，把编号为 1、2、3、4 的边分别放在一起，就可以看出 C_1、C_2、C_3、C_4 四个立方体应当如何叠放.

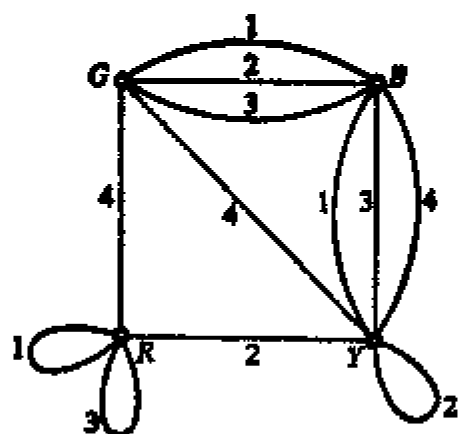
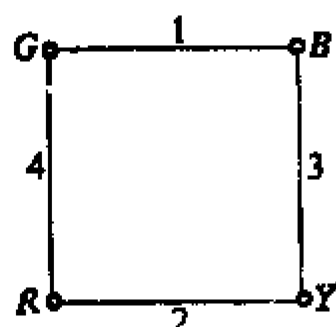
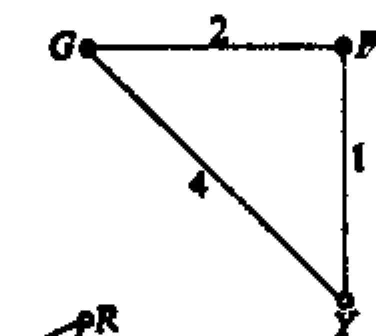


图 1.11

事实上，图 1.12 (a) 和 1.12 (b) 分别决定了由编号为 1、2、3、



(a)



(b)

图 1.12

4 的四个立方体叠成的棱柱的两对侧面. 从图 1.12 中标号为 1 的两条边可以看出，立方体 1 中属于棱柱的两对侧面的两组相对的面分别应为 G-B 和 B-Y，立方体 2 中两组相对的面分别应为 R-Y 和 G-B，立方体 3 中两组相对的面分别应为 B-Y 和 R-R，立方体 4 中两组相对的面分别应为 G-R 和 G-Y. 图 1.12 不仅决定了四个立方体的两组相对的面，同时也决定了立方体依次序叠放的方式. 例如由图 1.12 (a) 可以看出，四棱柱的一对侧面从下至上(依次从第 1 号到第 4 号立方体)，分别应为 B、R、Y、G 与 G、Y、B、R；而由 1.12(b) 可以看出四棱柱的另一对侧面由下至上分别应为 B、G、R、Y 和 Y、B、R、G. 根据以上的解释，不难把编号为

1、2、3、4 的四个立方体从下至上依顺序叠放在一起而得到满足要求的四棱柱. 根据图 1.12 而叠放出的四棱柱可参看图 1.13.

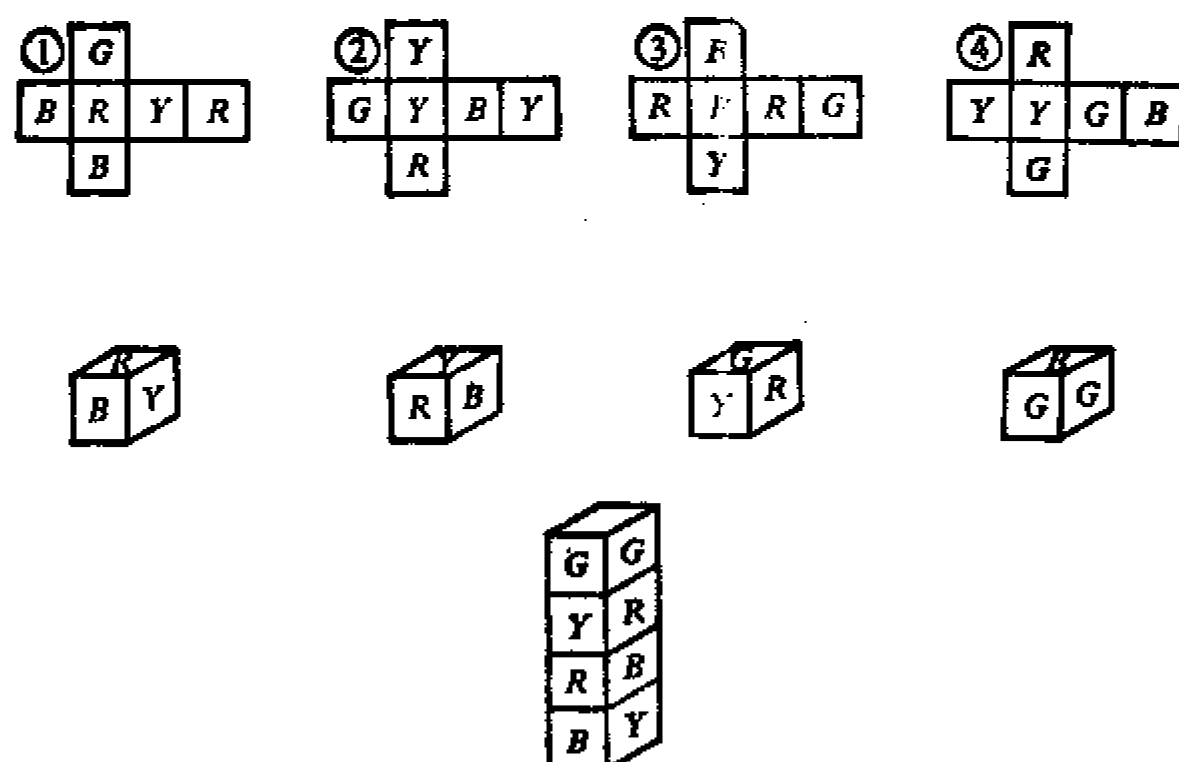


图 1.13

习　　题

1.1.1　列举五个从中可以引出图的概念的问题.

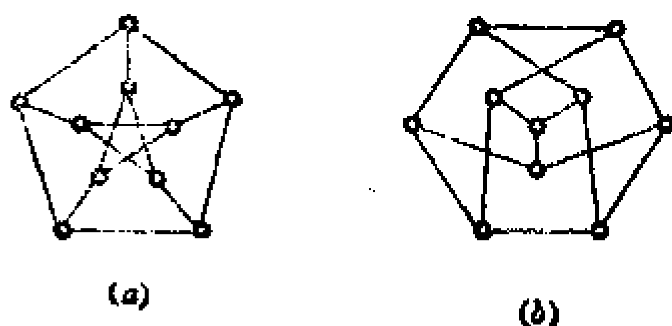
1.1.2　图 1.14 中画出的是乙烯和苯的分子式, C 和 H 分别代表碳原子



图 1.14

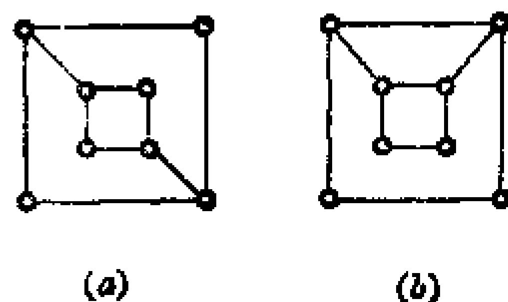
和氢原子．把分子式的结构图看成图．如果一个图代表某碳氢化合物的分子式，问它应当具备那些条件？

1.1.3 证明图 1.15 中的两个图同构，但图 1.16 中的两个图不同构，问图 1.17 中的两个图是否同构？



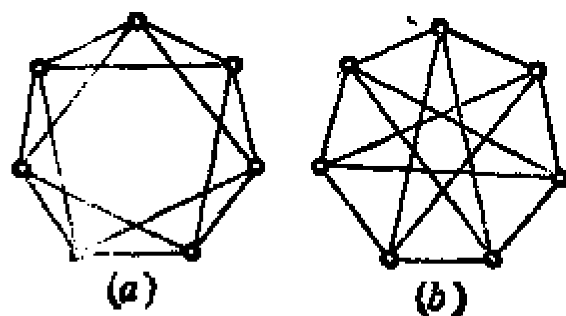
(a) (b)

图 1.15



(a) (b)

图 1.16



(a) (b)

图 1.17

1.1.4 设 $G_1 \cong G_2$，且 ϕ: $V(G_1) \to V(G_2)$ 是同构对应，证明 $\nu(G_1)=\nu(G_2)$，$\varepsilon(G_1)=\varepsilon(G_2)$，且 $d_{G_1}(v)=d_{G_2}(\phi(v))$。

1.1.5 证明总共有4个互不同构的3阶简单图，11个互不同构的4阶简单图。画出这些图。

1.1.6 设 $v_1, v_2, \cdots, v_\nu$ 是图 G 的顶点，则序列 $(d(v_1), d(v_2), \cdots, d(v_\nu))$ 称为 G 的度序列。证明非负整数序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是某一个图的度序列的充分必要条件为 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 是偶数。

1.1.7 设 $d=(d_1, d_2, \cdots d_n)$ 是非负整数序列，如果有一简单图的度序列为 d，则称 d 为图序列。判定下列各序列是否为图序列：(5,5,5,5,3,3)，(7,6,5,4,3,3,2)，(5,5,4,3,3,2)。

1.1.8 设 $d=(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是非负整数序列，$d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$。记 $d'=(d_2-1, d_3-1, \cdots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2} \cdots, d_n)$。

(a) 证明 d 是图序列的充分必要条件为 d' 是图序列。(提示：设 $d_G(v_i)=d_i (i=1,2,\cdots,n)$，如果 v_1 与某 v_k $(2 \leqslant k \leqslant d_1+1)$ 不相邻，则 v_1 必与某 $v_l (l \geqslant d_1+2)$ 相邻。因序列 d 非升，一定有某 v_j，$v_k v_j \in E(G)$，$v_l v_j \notin E(G)$。图 $G'=G+v_1 v_k+v_l v_j-v_k v_j-v_1 v_l$ 仍以 d 为度序列。)

(b) 根据(a)，给出一个检验 d 是否为图序列的方法；在 d 是图序列的情形，求出以 d 为度序列的简单图。以 $d=(5,5,4,3,3,2)$ 的情形给以说明。

1.1.9 (a) 证明对任何图 G，$\nu\delta/2 \leqslant \varepsilon \leqslant \nu\Delta/2$；

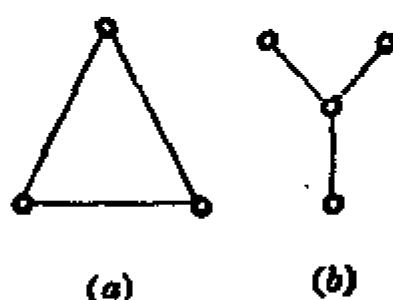
(b) 设 $S=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是平面点集，且任何一对点之间的距离至少为1。证明至多有 $3n$ 对距离恰好为1的顶点。(提示：若一对顶点间的距离为1，则在其间连一条边，得 n 阶图 G，$\Delta(G) \leqslant 6$。)

1.1.10 图 G 的线图(line graph) $L(G)$ 是指这样的一个图，它的顶点集是 G 的边集 $E(G)$，且 $L(G)$ 中两顶点相邻的充要条件是 G 中对应于这两个顶点的边相邻。

证明：(a) 图 1.1.8 中两个图的线图同构(事实上，它们是唯一的一对自己不同构但线图同构的图)；

(*b*) $L(G)$ 的顶点数为 $\varepsilon(G)$，又若 G 是简单图，则 $L(G)$ 的边数为 $\sum_{v\in V(G)}\binom{d(v)}{2}$

1.1.11　设黄、红、蓝、绿四色分别由 Y、R、B、G 表示，又四个立方体的染色状况由图 1.19 给出，要求把四个立方体叠成正四棱柱，使得每一侧面都由黄、红、蓝、绿四色的面拼凑而成。



(*a*)　　(*b*)

图 1.18

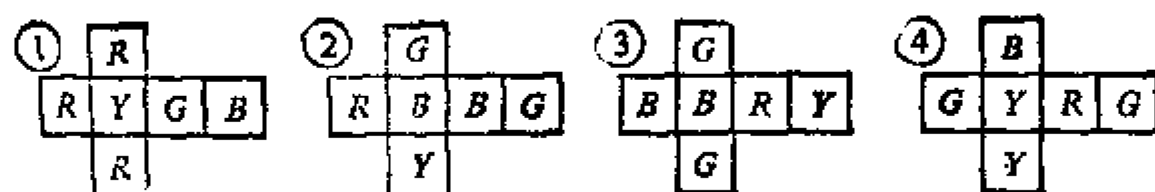


图 1.19

1.2　图的例子

以下给出一些重要的图类，这些图类在本书的正文和习题中将多次出现。

空图　如果图 G 的边集是空集，则称 G 为空图。有 n 个顶点的空图记为 E_n。空图的每一个顶点的度为零，即每一个顶点都是孤立点。

平凡图　只有一个顶点的图称为平凡图。平凡图包括 E_1 和一切带环的单点图。不是平凡图的一切其它的图都称为**非平凡图**。

完全图　任何一对顶点都相邻的简单图称为完全图．n 阶完全图记为 K_n，$K_1=E_1$，K_2 由两个顶点和连接它们的一条边构成，K_3 又称为三角形．图 1.20 中是 K_3、K_4 和 K_5 的图形．显然 K_n 恰有 $n(n-1)/2$ 条边．

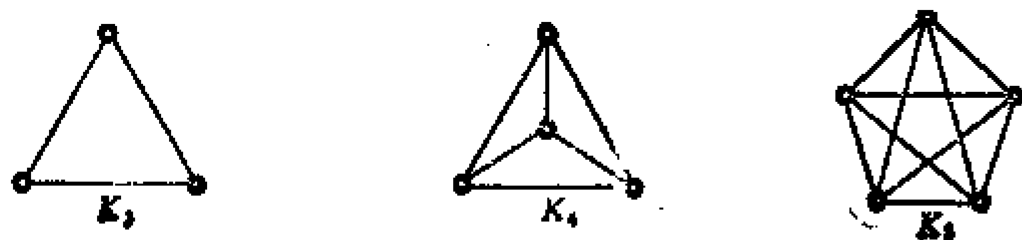


图 1.20

正则图　各个顶点的度都相等的图称为正则图，每一个顶点的度都等于 r 的情形称为 r **正则图**．3 正则图又称为 **3 次图**．K_4 和图 1.6 中的图都是 3 次图．空图是 0 正则图．完全图 K_n 是 $n-1$ 正则图．

二部图　如果图 G 的顶点集可以分划为两个互不相交的子集 X 和 Y，又 G 的任何一条边的两个端点分别在 X 和 Y 中，这时称 G 为二部图，而分划 (X,Y) 称为图 G 的**二分划**．分划为 (X,Y) 的二部图通常记为 $G(X,Y)$．**完全二部图**是指这样的简单二部图 $G(X,Y)$，其中 X 的每一个顶点与 Y 的每一个顶点间都有边相连；如果 $|X|=m$，$|Y|=n$，则记这样的完全二部图为 $K_{m,n}$，它的边数显然为 mn，而顶点数为 $m+n$．图 1.8 中绘出的两个图形都表示完全二部图 $K_{3,3}$．一个立方体的顶点和棱所构成的图是二部图同时也是 3 次图（图 1.21）．

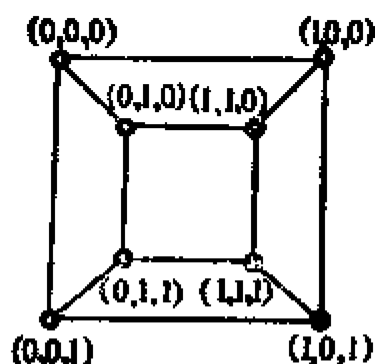


图 1.21

导出子图　设 V' 是 V 的非空子集．考虑图 G 的这样的子

图，它的顶点集是 V'，边集由图 G 的两个端点都在 V' 中的一切边所组成，记这个图为 $G[V']$，称为图 G 的由 V' 导出的子图。

设 E' 是 E 的非空子集。考虑图 G 的这样的子图，它的顶点集由 E' 中的一切边的端点所构成，而边集就是 E'，记这个图为 $G[E']$，称为图 G 的由边集 E' 导出的子图或边导出子图。图 1.22 中画出的分别是图 G 和它的导出子图。

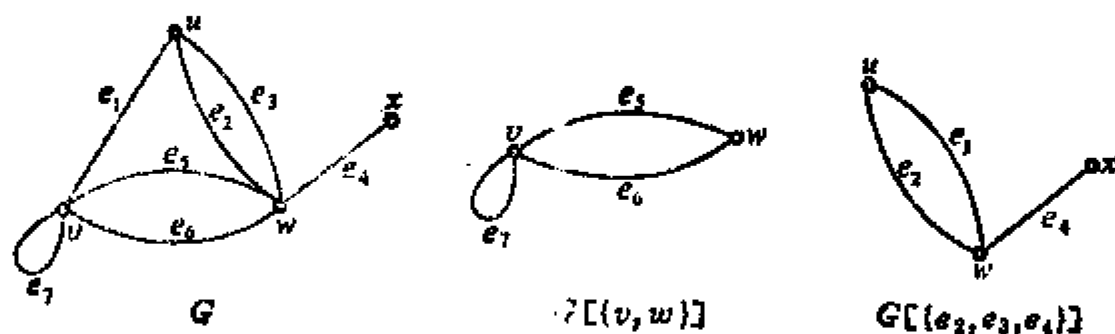


图 1.22

图的并、联和交 假设给定了图 $G_1=(V(G_1),E(G_1))$，$G_2=(V(G_2),E(G_2))$。如果 G_1 和 G_2 没有公共的顶点，则称 G_1 和 G_2 是**互不相交的**。如果 G_1 和 G_2 没有共同的边，则称 G_1 和 G_2 是**边不相交的**。G_1 和 G_2 的并 $G_1\cup G_2$ 就指这样的图，它的顶点集是 $V(G_1)\cup V(G_2)$，而边集是 $E(G_1)\cup E(G_2)$。如果 G_1 和 G_2 互不相交，则把 G_1 和 G_2 的并记成 G_1+G_2。如果 $V(G_1)\cap V(G_2)\neq\varnothing$，则顶点集为 $V(G_1)\cap V(G_2)$，边集为 $E(G_1)\cap E(G_2)$ 的图称为 G_1 和 G_2 的**交**，记为 $G_1\cap G_2$。

如果在 G_1+G_2 中把 $V(G_1)$ 的每一个顶点与 $V(G_2)$ 的每一个顶点都用一条边相连，这样得到的图称为 G_1 和 G_2 的**联**，记成 $G_1\vee G_2$。显然，完全二部图 $K_{m,n}=E_m\vee E_n$。

图的删除 设 F 是图 G 的若干条边构成的集合，$G-F$ 表示从 G 中删除 F 中的一切边后得到的图。如果 $F=\{e\}$，$G-\{e\}$ 简记为 $G-e$。显然 $G-F$ 与 G 有相同的顶点集，因此 $G-F$ 是 G 的支撑子图。如果 S 是 $V(G)$ 的非空真子集，$G-S$ 表示从图 G 中

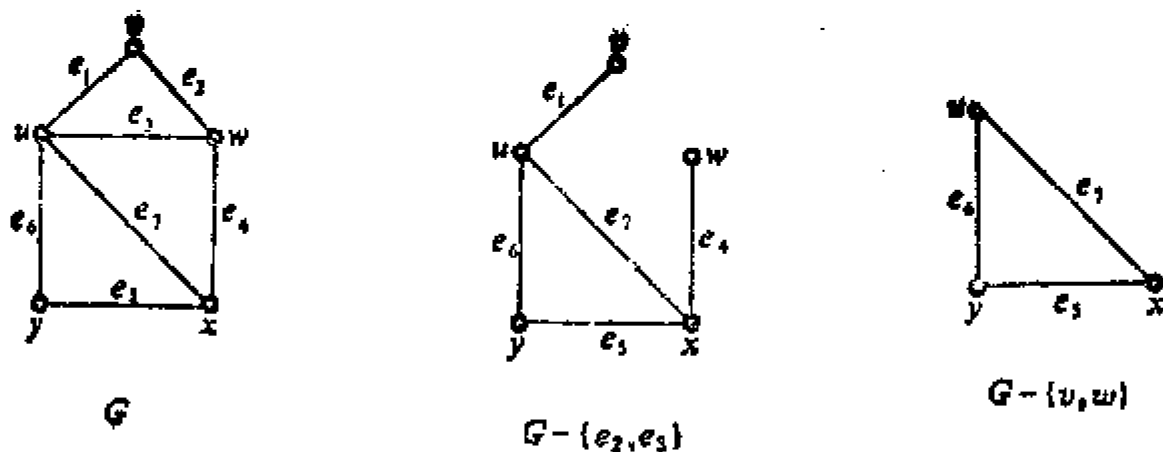


图 1.23

删除 S 中的顶点以及和 S 中的顶点关联的一切边后得到的图. 显然$G-S=G[V\backslash S]$. 当 $S=\{v\}$,把 $G-\{v\}$记为 $G-v$.

如果在图 G 中添加一条以图 G 的顶点 u 和顶点 v 为端点的边 e,就得到在图 G 上添加边 e 的图,记为 $G+e$. 可以类似地定义 $G+E'$,这里 E' 是添加到图 G 上的边集.

补图 设 G 是一个简单图. V 记 G 的顶点集. G 的补图 $\overline{G}$ 是指这样的一个简单图,它的顶点集仍然是 V,又 $\overline{G}$ 中的两个顶点相邻的充要条件是它们在 G 中不相邻. 显然,如果 $\overline{G}$ 是 G 的补图,则 G 也是 $\overline{G}$ 的补图. 如果$|V|=n$,把 G 看成完全图 K_n 的一个子图,只要从 K_n 中除去 G 的一切边就得到 $\overline{G}$. 完全图 K_n 与空图 E_n 互为补图.

除了以上定义的图外,图论中还研究**有向图**. 本书第八、九、十三章将着重讨论与有向图有关的问题.

习 题

1.2.1 设 G 是有 ν 个顶点 ε 条边的简单图,证明 $\varepsilon\leqslant\binom{\nu}{2}$,且等号仅当 G 是完全图时才成立.

1.2.2 设 G 是非平凡简单图,证明 G 中一定有两个顶点的度相等;由此说明人数至少为 2 的人群中,总有两个人在这一群人中有相同数目的朋

友。

1.2.3(*a*) 给出恰好有两个顶点的度相等的简单图 G 的构造（提示：G 只可能有三种情形，即 $G=E_2$，$G=E_1+G_1$，这里 G_1 是无孤立点的非平凡图；G 自己是无孤立点的非平凡图。当 G 是无孤立点的非平凡图，其度序列是 $(1,2,3,\cdots,\left\lfloor\frac{\nu}{2}\right\rfloor-1,\left\lfloor\frac{\nu}{2}\right\rfloor,\left\lceil\frac{\nu}{2}\right\rceil,\left\lceil\frac{\nu}{2}\right\rceil+1,\cdots,\nu-1)$，$\nu$ 是 G 的阶。本书中用 $\lfloor x\rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数，$\lceil x\rceil$ 表示不小于 x 的最小整数。若 ν 为偶数（奇数），从 $K_2(K_{1,2})$ 出发，每次添加两个顶点，使其中的一个顶点和所有的顶点相连）。

(*b*) 具体画出当 $\nu=6$ 和 $\nu=7$ 时 (*a*) 中所述的图的图形。

1.2.4 证明：

(*a*) 完全图的每一个导出子图是完全图；

(*b*) 二部图的每一个子图是二部图。

1.2.5 画出顶点数不超过 8 的全部互不同构的简单 3 次图的图形。（提示：图中一定包含子图 $K_{1,3}$，考虑 $K_{1,3}$ 之间的相互关系。答案：共 9 个，4 阶的 1 个，6 阶的 2 个，8 阶的 6 个。）

1.2.6 如果 d 是图序列且 $d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_n$，则 $\sum_{i=1}^{n}d_i$ 是偶数且对一切 $1\leqslant k\leqslant n$，$\sum_{i=1}^{k}d_i\leqslant k(k-1)+\sum_{i=k+1}^{n}\min\{k,d_i\}$。（提示：设 $d_G(v_i)=d_i$，考虑导出子图 $G[\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}]$ 以及从 $v_1,v_2,\cdots,v_k$ 引向 v_i $(i\geqslant k+1)$ 的边数。）（1960 年 Erdös 和 Gallai 证明 d 是图序列的这个必要条件也是充分的。）

1.2.7 证明若 $G(X,Y)$ 是 k 正则二部图 $(k>0)$，则 $|X|=|Y|$。

1.2.8 证明：

(*a*) $\varepsilon(K_{m,n})=mn$；

(*b*) 如果 G 是简单二部图，则 $\varepsilon\leqslant\nu^2/4$。

1.2.9 考虑 k 元数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_k)$，这里 $a_i=0$ 或 1。把这些数组看成图的顶点。如果代表两个顶点的数组含有一位对应的坐标不同，则在相应的顶点之间连一条边，这样得到的图称为 k 方体 Q_k。图 1.21 中画出的是 Q_3。证明 k 方体有 2^k 个顶点，$k2^{k-1}$ 条边，且是二部图。

1.2.10 证明K_n的线图有$\frac{1}{2}n(n-1)$个顶点且是度为$2n-4$的正则图、求出关于$K_{r,s}$的类似结果. 证明K_5的线图的补图与彼得森(Peterson)图(图1.15)同构.

1.2.11 若简单图$G\cong\overline{G}$,则称G为自补图. (a) 证明自补图的顶点数$\nu=4k$或$4k+1$. (b) 找出一切4阶和5阶的自补图.

1.2.12 图G到自身的同构对应称为G的自同构对应.

(a) 证明简单图G的自同构对应可以视为保持顶点相邻性不变的V的置换.又图G的全体自同构对应构成一个群,它是n阶对称群S_n的子群,称为图G的自同构群,记为$\Gamma(G)$.

(b) 证明对任何简单图G,$\Gamma(G)=\Gamma(\overline{G})$.

(c) 求出$\Gamma(K_n)$和$\Gamma(K_{m,n})$.

(d) 以A记元素为(1)(2)(3),(1,3,2),(1,2,3)的置换群. 证明没有以{1,2,3}为顶点集的简单图G,其自同构群$\Gamma(G)=A$.

(e) 证明图(1.24)中的图满足$\Gamma(G)=1$(弗鲁赫特(Frucht)1939年证明每一个抽象的群都与某一个图的自同构群同构).

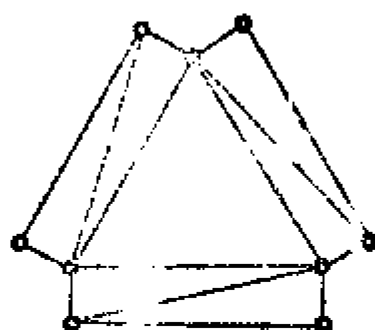


图 1.24

参 考 文 献

Erdös, P.and Gallai, T.(1960) Graphs with prescribed degrees of vertices(Hungarian)Mat.Lapok,11,264—274.

(参阅:Berge, C.(1973).Graphs and Hypergraphs,North Holland. Amsterdam,115—116.

或 Berge,C.(1985).Graphs, North Holland,Amsterdam,113—114.)

Frucht, R.(1939).Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstracter Gruppe.Composito Math,6,239—50.

第二章 路 和 圈

2.1 路与连通性

图 G 中的途径是指由 G 中的顶点和边交替出现而构成的有限序列 $W=v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3\cdots e_kv_k$，这里 $v_j(0\leqslant j\leqslant k)$ 是 G 的顶点，$e_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 是 G 的边，又边 e_i 的端点是 v_{i-1} 和 v_i。v_0 称为途径 W 的起点，v_k 称为途径 W 的终点，称 W 为从 v_0 到 v_k 的途径，或连接 v_0 和 v_k 的途径。$v_i(1\leqslant i\leqslant k-1)$ 称为途径 W 的内点，k 称为 W 的长或长度。有时把途径 W 简记为 $v_0v_1v_2\cdots v_k$。需注意的是，由于以顶点 v_{i-1} 和 v_i 为端点的边可能不止一条，因此 $v_0v_1\cdots v_k$ 可能同时表示若干个不同的途径。因简单图中不存在重边，故简单图 G 中的途径 $v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3\cdots e_kv_k$ 由顶点序列 $v_0v_1v_2\cdots v_k$ 完全决定。

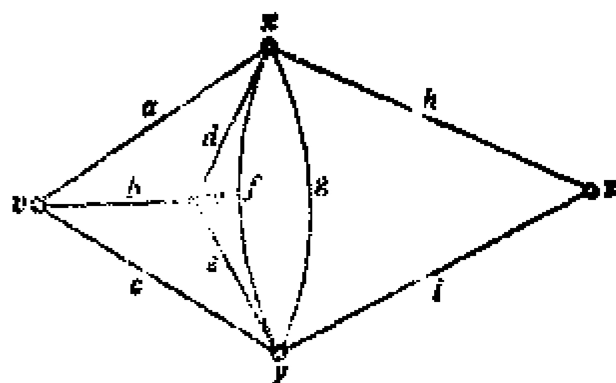
途径 W 中有些边可能重复出现。如果途径 W 的边互不相同，则称 W 为迹。如果迹 W 的顶点 $v_0,v_1,\cdots,v_k$ 都不相同，称 W 为路。

如果途径的长至少为 1，又起点和终点相重合，则称途径为闭途径。在迹的情形称为闭迹。起点和内点互不相同的闭迹称为圈。图 2.1 中给出了途径、迹、路、闭迹、圈的例子。

如果图 G 或 G 的某一个子图的顶点和边恰好构成一个途径、迹、路或圈，我们就把图 G 或它的子图相应称为途径、迹、路或圈。

长为 k 的圈称为 k 圈。依 k 为奇数和偶数称相应的圈为奇圈或偶圈。长为 1 的圈就是环，长为 3 的圈通常称为三角形。

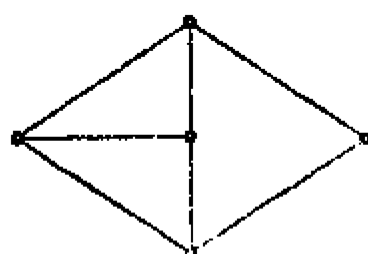
如果 G 的任何一对顶点间都有路相连，则称 G 是连通图。若图 G 的子图自身连通，则称它为 G 的连通子图。如果 G 的连通



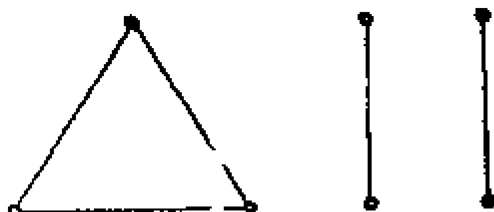
途径 $vbwdxfygxdwey$
迹 $vbwdxfygxhz$
路 $vbwdxfyiz$
闭迹 $vbwdxfyizhxav$
圈 $vbwdxhziycv$

图 2.1

子图 H 不是 G 的任何连通子图的真子图，则 H 称为 G 的**极大连通子图**. 图 G 的极大连通子图又称为 G 的**连通分支**，图 G 的连通分支的个数记为 $\omega(G)$ 或简记为 ω. $\omega(G)\geqslant 2$ 的图称为**非连通图**. 显然，G 的任何两个连通分支都是不相交的，且 G 可以表示为它的各个连通分支的并. 不难看出，图 G 连通的充要条件是它只有一个连通分支，这个连通分支就是图 G 自身. 图的连通性的定义很直观：连通图就是一个连成整块的图；而非连通图可以分为互无公共顶点的若干部分，每一部分都是连通的，而不同的部分间没有边相连接，这些连通部分也就是 G 的连通分支. 图 2.2 中画出的是连通图和非连通图的例子.



连通图



由三个连通分支构成的非连通图

图 2.2

连接顶点 u 和 w 的长度最短的路称为 u 和 w 之间的**最短路**，顶点 u 和 w 之间的最短路的长称为顶点 u 和 w 之间的**距离**，记为 $d(u,w)$. 如果 u 和 w 分属于 G 的不同的连通分支，即 u 和 w 之间无路相连，则规定 $d(u,w)=\infty$.

可以用圈来刻划二部图，这就得到下面的定理.

定理 2.1 图 G 是二部图的充要条件是 G 中不存在奇圈.

证 必要性 设 $G(X,Y)$ 是二部图，它的二分划为 (X,Y)，又 $v_0v_1v_2\cdots v_kv_0$ 是 $G(X,Y)$ 中的一个圈，其长度为 $k+1$. 不失一般性，设 $v_0\in X$，于是 $v_1\in Y$，$v_2\in X$，$\cdots$. 一般有 $v_{2i}\in X$，$v_{2i+1}\in Y$. 由于在圈 $v_0v_1v_2\cdots v_kv_0$ 中 v_k 与 v_0 相邻，因此，$k=2l+1$，从而圈是偶圈.

充分性 显然只需考虑 G 为连通图的情形. 取定图 G 中的一个顶点 u，令

$$X=\{x\mid d(u,x)\text{是偶数}\}$$
$$Y=\{y\mid d(u,y)\text{是奇数}\}$$

(X,Y) 是 G 的顶点集的一个分划. 为了证明 G 是二部图，只需证明 X 中的任何两个顶点不相邻，Y 中的任何两个顶点也不相邻。设 v 和 w 是 X 中的任何两个顶点. 以 P 记从 u 到 v 的最短路，Q 记从 u 到 w 的最短路. 设 P 与 Q 从 u 算起最后一个公共顶点是 u_1。因为 P 和 Q 都是最短路，路 P 中从 u 到 u_1 的那一段与路 Q 中从 u 到 u_1 的那一段的长一定相等. 又因 P 和 Q 的长都是偶数，从而 P 中从 u_1 到 v 的那一段 P_1 的长与 Q 中从 u_1 到 w 的那一段 Q_1 的长有相同的奇偶性，并且除了公共顶点 u_1 外 P_1 和 Q_1 再没有其它的公共顶点. 因此，如果 v 和 w 相邻，P_1、Q_1 和边 vw 构成 G 中的一个奇圈，这与定理的假定矛盾. 因此 X 中的任何两个顶点都不相邻. 同理可证 Y 中的任何两个顶点也不相邻. □

以下讨论与图的连通性有关的一些问题.

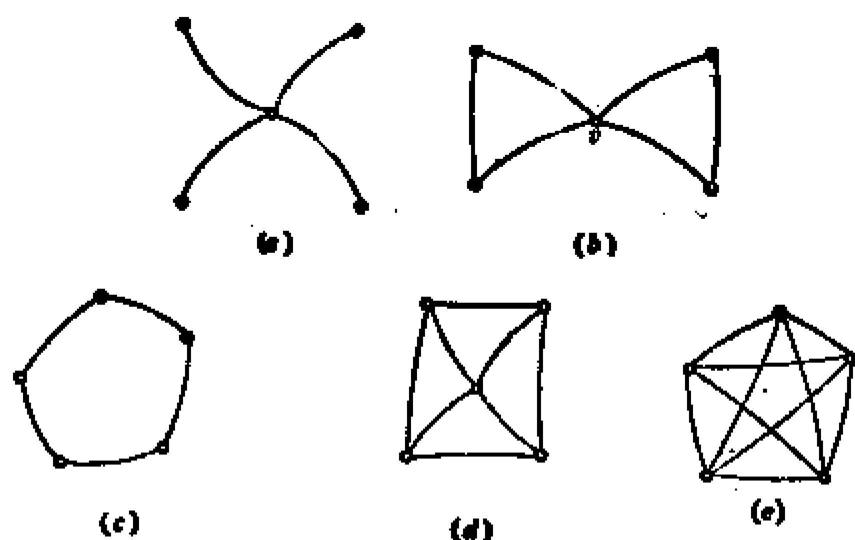


图 2.3

首先我们注意到同样是连通图，其"连通程度"可以是不一样的，考察下面的各个图。

只要除掉图(a)中任何一条边就破坏了它的连通性。从图(b)中去掉任何一条边后余下的图仍然是连通的，但去掉顶点v连通性就被破坏。图(c)是一个圈，去掉任何一条边或任何一个顶点还是连通的，但除去两条边后不再连通；除去两个顶点连通性也可能被破坏。图(d)只有去掉至少三条边或三个顶点才可能不连通。图(e)中只当去掉至少四条边后才可能不连通，又因(e)中任何一对顶点之间都有边相连，因此去掉其中的任何一个顶点集都不能破坏它的连通性。如果至少要去掉若干条边或若干个顶点后才能破坏图的连通性，我们可以把这样的边或顶点的最小数目合理地看成图的连通程度的一种度量。这个数目越大，图的连通程度越高，这就很自然引出了图的**连通度**和**边连通度**的定义。

设 G 是一个 ν 阶连通图。如果 G 的任何一对顶点都相邻，即 G 的底图是完全图，则定义 G 的连通度 $\kappa(G)=\nu-1$。如果 G 中有不相邻的顶点，则一定存在顶点集V 的真子集 V'，使得$G-V'$不连通。V' 称为图 G 的**顶点割**。这时定义 G 的连通度

$$\kappa(G)=\min\{|V'|\ |V'\text{是 }G\text{ 的顶点割}\}$$

即这时的连通度定义为要使这个图变得不连通所需去掉的最少点

数.

如果 G 不连通，规定 $\kappa(G)=0$.

因此，$\kappa(G)=0$ 的图要么是平凡图，要么是非连通图. 如果 $\kappa(G)=l>0$，则 G 一定是连通图. 这时要么 G 的阶为 $l+1$ 并且任何一对顶点都相邻；要么 G 的阶不小于 $l+2$，G 中有 l 个顶点构成的顶点割，但不存在由 $l-1$ 个顶点构成的顶点割. 称 $\kappa(G)\geq k$ 的图为 **k 连通图**. 1 连通图即一切非平凡连通图. 当图 G k 连通时，要么 $\nu=k+1$，且 G 的底图是完全图；要么 $\nu\geq k+2$ 且 G 中不存在由 $k-1$ 个顶点构成的顶点割. 因此，图 G k 连通的充要条件为 G 的阶 $\nu(G)\geq k+1$，且 G 中不存在由 $k-1$ 个顶点构成的顶点割.

设 S 与 S' 是 V 的非空子集，用 $[S,S']$ 表示图 G 中一端属于 S，一端属于 S' 的一切边所构成的边集. 特别当 S 是 V 的任何非空真子集，又 $S'=\bar{S}=V\backslash S$，且 $E'=[S,\bar{S}]$ 非空，则称 E' 是 G 的**边割**. 如果 $E'=\{e\}$，即边割中只含一条边，则称 e 是图 G 的**割边**.

显然，如果 G 是一个非平凡图，去掉其中的一个边割后得到的图的连通分支的数目必然比 G 的连通分支的数目大. 特别当 G 是一个非平凡连通图时，去掉其中的任一个边割后得到的图必不连通. 如果 G 是非平凡连通图，定义

$$\lambda(G)=\min\{|E'|\,|\,E' \text{是 } G \text{ 的边割}\}$$

为 G 的**边连通度**，即一个非平凡连通图的边连通度就是要使这个图变得不连通所需去掉的最少边数. 如果 G 是平凡图或非连通图，规定 $\lambda(G)=0$. 因此 $\lambda(G)=0$ 的图或是平凡图，或是非连通图. $\lambda(G)=l\geq1$ 的图是指这样的连通图，其中恰有 l 条边构成的边割，但任何 $l-1$ 条边都不是边割. $\lambda(G)=1$ 的图是含有割边的连通图. $\lambda(G)\geq k$ 的图称为 **k 边连通图**. 1 边连通图即一切非平凡连通图. 显然 k 边连通图($k\geq2$)是指这样的连通图，至少要去掉

k 条边才可能破坏它的连通性，即其中不存在由 $k-1$ 条边构成的边割.

如果以 P_n 和 C_n 分别表示长为 n 的路和圈，由定义立即看出 $\kappa(P_n)=\lambda(P_n)=1(n\geqslant 1)$，$\kappa(C_n)=\lambda(C_n)=2(n\geqslant 3)$. 又不难看出 $\kappa(K_n)=\lambda(K_n)=n-1$，$\kappa(K_{m,n})=\lambda(K_{m,n})=m(1\leqslant m\leqslant n)$.

从定义直接看出，对任何 $e\in E(G)$，

$$\lambda(G)-1\leqslant\lambda(G-e)\leqslant\lambda(G)$$

如果 G 的阶大于 1，对任何 $v\in V(G)$，

$$\kappa(G)-1\leqslant\kappa(G-v)$$

值得注意的是，不等式 $\kappa(G-v)\leqslant\kappa(G)$ 并非对一切图 G 都成立. 例如对图 2.4 中的图G，$\kappa(G)=1$，但 $\kappa(G-v)=4$.

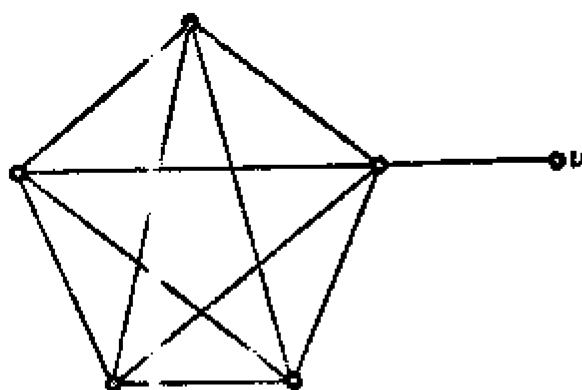


图 2.4

以下用引理的形式给出有关割边的一些性质.

引理 2.2　对任何 $e\in E(G)$有不等式

$$\omega(G)\leqslant\omega(G-e)\leqslant\omega(G)+1$$

又 e 是 G 的割边的充要条件为 $\omega(G-e)=\omega(G)+1$（或表述为 $\omega(G-e)>\omega(G)$. ）

证　G 可由 $G-e$ 添加边 e 而得到. 由于在图中添加一条边连通分支数要么不变，要么减少 1. 因此

$$\omega(G)\leqslant\omega(G-e)\leqslant\omega(G)+1$$

设 $e=uv$ 是 G 的割边. 按定义，存在非空的 $S\subset V(G)$ 使得 $\{e\}=[S,\bar{S}]$. 设 $u\in S$，$v\in\bar{S}$. 显然，顶点 u 和 v 在 G 的同一个连通分支内；另一方面，G 中连接 u 和 v 的任意一条路上必定包含 $[S,\bar{S}]$中的边. 因 e是$[S,\bar{S}]$中唯一的边，故这样的路上必含 e，从而 $G-e$ 中没有连接 u 和 v 的路，即在 $G-e$ 中 u 与 v 属于不同的连通分支. 由此可知 $\omega(G-e)>\omega(G)$，这个不等式等价于

$\omega(G-e)=\omega(G)+1$.

反之，设 $\omega(G-e)=\omega(G)+1$，又 e 是 G 的某个连通分支 W 中的一条边. W 的顶点分属 $G-e$ 的两个连通分支 W'和 W''，且 e 是唯一的一条一端在 W' 中一端在 W'' 中的边. 令 $S=V(W')$，S 是 $V(G)$ 的非空真子集并且有 $\{e\}=[S,\bar{S}]$，故 e 是 G 的割边. □

引理 2.3 $e\in E(G)$是图 G 的割边的充要条件为 e 不在 G 的任何一个圈上.

证 设 e 是 G 的割边，且 e 在 G 的圈 C 上. 设 u 和 v 是 G 的同一个连通分支中的两个顶点. 如果 G 中连接 u 和 v 的路 P 上不含边 e，u 和 v 在 $G-e$ 中也由 P 相连；如果 P 上含有边 e，在图 $G-e$ 中把 P 上的边 e 用路 $C-e$ 来代替，这就在 $G-e$ 中得到一条从 u 到 v 的途径，从而 $G-e$ 中有从 u 到 v 的路（习题 2.1.2）. 因此，无论那一种情况 u 和 v 都在 $G-e$ 的同一个连通分支内. 于是 $\omega(G-e)=\omega(G)$. 但 e是割边，由引理 2.2，$\omega(G-e)>\omega(G)$. 矛盾.

反之，设 $e=uv$ 不在 G 中的任何一个圈上，且 e 不是割边. 因 u 和 v 是边 e 的端点，它们在 G 的同一个连通分支内. 由于 e 不是割边，由引理 2.2 $\omega(G-e)=\omega(G)$，故 $G-e$ 中 u 和 v 仍在同一个连通分支内，由此可知 $G-e$ 中有连接 u 和 v 的路 P，从而 $P+e$ 是 G 中的圈. 矛盾. □

顶点数为 ν 的边数最多的简单图是完全图 K_ν，因此任何一个 ν 阶简单图的边数 ε 不可能超过 $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$. 容易想象，如果一个 ν阶简单图的边数足够多，则 G 必连通. 由此引出一个问题：如果简单图 G 是一个 ν 阶连通图，它的边数 ε 的上、下限各是多少？再把这个问题引伸一步：如果简单图 G 是一个 ν 阶图，它的连通分支数为 ω，问 G 的边数 ε 的上、下限各是多少？下面的定理回答

了这个问题．

定理 2.4 顶点数为 ν，连通分支数为 ω 的简单图的边数 ε 满足不等式

$$\nu-\omega\leqslant\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}(\nu-\omega)(\nu-\omega+1)$$

证 为了证明 $\nu-\omega\leqslant\varepsilon$，对 G 的边数 ε 作归纳．显然，当 $\varepsilon=0$ 时不等式成立．考虑连通分支数为 ω，边数最少的 ν 阶简单图 G，以 ε_0 记它的边数．对于 G 的任何一条边 e，由引理 2.2 可知 $G-e$ 的连通分支数为 $\omega+1$，其边数为 ε_0-1，顶点数仍然为 ν．由归纳法

$$\nu-(\omega+1)\leqslant\varepsilon_0-1$$

这等价于

$$\nu-\omega\leqslant\varepsilon_0$$

从而任何连通分支数为 ω 的 ν 阶简单图的边数 ε 满足

$$\nu-\omega\leqslant\varepsilon_0\leqslant\varepsilon$$

为了估计 ε 的上界，可设 G 的每一个连通分支都是完全图．假定 C_i 和 C_j 是 G 的两个连通分支，它们的顶点数分别为 ν_i 和 ν_j，其中 $\nu_i\geqslant\nu_j>1$．如果用顶点数为 ν_i+1 和 ν_j-1 的完全图来代替 C_i 和 C_j，则经这种变换得到的新图的分支数和顶点数仍然是 ω 和 ν，但却增加了

$$\frac{1}{2}\{(\nu_i+1)\nu_i-\nu_i(\nu_i-1)\}-\frac{1}{2}\{\nu_j(\nu_j-1)-(\nu_j-1)(\nu_j-2)\}$$
$$=\nu_i-\nu_j+1$$

条边，注意 $\nu_i-\nu_j+1\geqslant1$．由此可以看出，为使连通分支数为 ω 的 ν 阶简单图的边数最大，只需反复进行上述变换，最后得到的图是 $\nu-\omega+1$ 个顶点的完全图和 $\omega-1$ 个孤立顶点的并，其边数恰好是 $\frac{1}{2}(\nu-\omega)(\nu-\omega+1)$．□

在图的连通度 $\kappa(G)$、边连通度 $\lambda(G)$ 和最小度 $\delta(G)$ 之间有

一个简单关系式.

定理 2.5 对任何图 G 都有不等式

$$\kappa(G)\leqslant\lambda(G)\leqslant\delta(G) \tag{2.1}$$

证 如果 G 不连通或 G 是平凡图,则 $\kappa(G)=\lambda(G)=0$,不等式(2.1)显然成立. 故只需考虑 G 是非平凡连通图的情形.

先证 $\lambda(G)\leqslant\delta(G)$. 设 $d(v)=\delta(G)$. 与 v 相关联的一切连杆是 G 的一个边割. 故 $\lambda(G)\leqslant d(v)=\delta(G)$.

以下证明

$$\kappa(G)\leqslant\lambda(G) \tag{2.2}$$

如果 G 不是简单图, 考虑 G 的底图 $\tilde{G}$,显然有$\kappa(\tilde{G})=\kappa(G)$,$\lambda(\tilde{G})\leqslant\lambda(G)$. 因此,如果(2.2)对简单图成立,也就对一般的图成立. 因此以下都假定 G 是简单图. 又若 $G=K_n$,$\kappa(K_n)=\lambda(K_n)=n-1$,(2.2)真.

由以上的讨论,只需对非平凡的简单连通图且不是完全图的情形证明(2.2).

设 $\lambda(G)=k\geqslant1$. 又 $E'=\{x_1y_1,\ x_2y_2,\cdots,x_ky_k\}$ 是 G 的边割,其中恰有 k 条边. 因 E'是 G 的最小边割,$G-E'$ 由两个连通分支 X 和 Y 组成. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_k$是 X 中的顶点, $y_1,y_2,\cdots,y_k$是 Y 中的顶点. needs注意的是: $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 中和 $y_1,y_2,\cdots,y_k$ 中都分别可能有若干个顶点是相同的. 如果 X 中除 $x_1,x_2,\cdots,x_k$外还有其它的顶点,则$\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ 就是 G 的顶点割,于是$\kappa(G)\leqslant k=\lambda(G)$. 关于 Y 可类似说明. 因此,不妨假定 X 的全部顶点就是$\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$,而 Y 的全部顶点就是$\{y_1,y_2,\cdots,y_k\}$.

设 $x_1,x_2,\cdots,x_k$中不同的顶点一共有 i 个$(1\leqslant i\leqslant k)$. 不失一般性,设它们就是 $x_1,x_2,\cdots,x_i$. 因 $\delta(G)\geqslant k$,与每一个 $x_t(1\leqslant t\leqslant i)$关联的边至少有 k 条. 由于 G 是简单图,与 x_t关联的边中至少有$(k-(i-1))$条的另一个端点在 Y 中. 因此, 一个端点在 X

中，一个端点在Y中的边至少有$i(k-i+1)$条.

考察等式

$$i(k-i+1)-k=(k-i)(i-1)$$

如果$1<i<k$，上式为正，即一个端点在X中一个端点在Y中的边多于k条，这与连接X和Y的边恰为k条的前提矛盾．因此只能$i=1$或$i=k$．此外，只要任何一个$d(x_t)>k$ $(1\leqslant t\leqslant i)$也会引出同样的矛盾．故$X$中的顶点数要么为1，要么为$k$，且$X$中每一个顶点的度都是$k$．关于$Y$有完全类似的结论．又因$G$不是完全图，故$X$和$Y$各有$k$个顶点，$k\geqslant 2$且$G[X]$和$G[Y]$都是$k$阶完全图，其间恰有$k$条互不相邻的边相连．这时$G$的任何一个顶点的$k$个邻点都是$G$的顶点割，因此$\kappa(G)\leqslant k=\lambda(G)$．□

任给三个满足(2.1)式的正整数$\kappa(G)$、$\lambda(G)$、$\delta(G)$，都存在图G，使得它们恰好相应地是G的连通度、边连通度和最小度（习题2.1.25），下图中给出$\kappa(G)=3$，$\lambda(G)=4$，$\delta(G)=5$的情形.

由这个例子不难看出在一般的情形下如何构造符合要求的G.

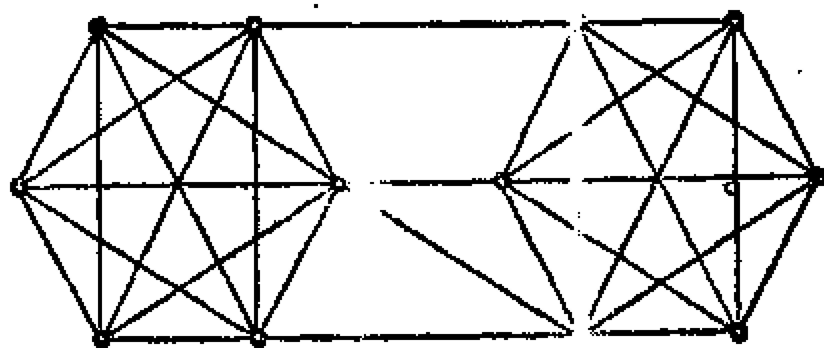


图 2.5

习　题

2.1.1　在彼得森图（图1.15）中求：(a) 长为9的路，(b) 长分别为5、6、8、9的圈，(c) 分别由3、4、5条边构成的边割，(d) 分别由3、4、5个顶点构成的顶点割.

2.1.2 证明：(a) 如果图 G 中有连接顶点 u 和 v 的途径，则 G 中必有连接 u 和 v 的路；

(b) 如果 e 是图 G 的某闭迹中的边，则 e 必是图 G 的某圈中的边.

2.1.3 证明：(a) 如果 G 是简单图且 $\delta \geqslant k$，则 G 中有长为 k 的路；

(b) 又若 $k \geqslant 2$，则 G 中有长度不小于 $k+1$ 的圈.

2.1.4 设简单连通图 G 满足 $\delta = k \geqslant 1$，证明 G 中有路 $P = x_1x_2\cdots x_k$ 使得 $G - \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ 连通.（提示 设 $x_1x_2\cdots x_l$ 是 G 中的最长路，$l \geqslant k+1$（习题 2.1.3）. 记 $G_1 = G - \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$，设 $y_0y_1\cdots y_m$ 是 G_1 的不含有路 $x_{k+1}\cdots x_l$ 的连通分支 C 中的最长路，显然有 $\delta_C(y_0) \leqslant m$. y_0 在 $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ 中最多有 $k-m-1$ 个邻点，但这将导致 $d_G(y_0) \leqslant k-1$ 的矛盾.）

2.1.5 证明图 G 连通的充分必要条件是对于任何非空真子集 $S \subset V(G)$，$[S, \bar{S}]$ 非空.

2.1.6 证明若图 G 连通，则 G 的线图 $L(G)$ 连通.

2.1.7 证明：(a) 简单图 G 和它的补图 $\bar{G}$ 至少有一个连通；

(b) 每一个自补图必连通.

2.1.8 证明连通图中任何两个最长路必有公共顶点.

2.1.9 证明对任何满足 $1 \leqslant k \leqslant \nu$ 的整数 k，ν 阶连通图含有 k 阶连通子图.

2.1.10 举例说明引理 2.2 中的不等式当把边 e 换为顶点 v 时，一般不成立.

2.1.11 证明 $k(k \geqslant 2)$ 正则二部图中不存在割边.

2.1.12 (a) 证明如果 G 是简单图且 $\varepsilon > \binom{\nu-1}{2}$，则 G 连通

(b) 对 $\nu > 1$，求边数 $\varepsilon = \binom{\nu-1}{2}$ 的非连通简单图.

2.1.13 (a) 证明如果 G 是简单图且 $\delta > \left[\frac{\nu}{2}\right] - 1$，则 G 必连通.

(b) 当 ν 为偶数时，求出一个不连通的简单 $\left(\left[\frac{\nu}{2}\right] - 1\right)$ 正则图.

2.1.14 证明如果 G 是简单图且 $\delta \geqslant (\nu+k+2)/2$，则 G k 连通（提示：证明从 G 中删去 $k-1$ 个顶点之后仍然连通. 利用题 2.1.13(a) 中的结果）.

2.1.15　设图G的阶至少为3，证明：

(a) 对G中的任意三个顶点u、v、w都有不等式

$$d(u,w)\leqslant d(u,v)+d(v,w)$$

(b) 如果$d(u,w)\geqslant 2$，一定有顶点v满足

$$d(u,w)=d(u,v)+d(v,w)$$

2.1.16　图G中长度最小的圈称为**最短圈**，最短圈的长称为**围长**，如果G中无圈，定义G的围长为无穷大。C_{n-1}和K_1的联图$C_{n-1}\vee K_1$称为阶为n的**轮**，记为W_n。求K_n、$K_{m,n}$、C_n、W_n、彼得森图、Q_k(k方体)各个图的围长。

2.1.17　证明围长为4的k正则图至少有$2k$个顶点，又恰有$2k$个顶点的这样的图在同构的意义下唯一。

2.1.18　$\text{diam}(G)=\max\limits_{x,y\in V}\{d(x,y)\}$称为图$G$的**直径**，$\text{rad}(G)=\min\limits_{x\in V}\{\max\limits_{y\in V}d(x,y)\}$称为$G$的**半径**。

(a) 求P_n、C_n、K_n、W_n、彼得森图的直径和半径。

(b) 证明$\text{rad}(G)\leqslant\text{diam}(G)\leqslant 2\,\text{rad}(G)$。举例说明等号可能达到。

2.1.19　证明如果简单图G满足$\text{diam}(G)\geqslant 3$，则$\text{diam}(\overline{G})\leqslant 3$。（提示：如果$d_G(u,v)\geqslant 3$，则$d_{\overline{G}}(u,v)=1$。又任何顶点$x$在图$G$中不能同时与$u$、$v$相邻，故$d_{\overline{G}}(u,x)$和$d_{\overline{G}}(v,x)$中至少有一个等于1。）

2.1.20　证明若G是非平凡自补图，则$\text{diam}(G)=2$或$\text{diam}(G)=3$。

2.1.21　求$K_{m,n}$、W_n、Q_k、彼得森图的连通度和边连通度(提示：Q_k可以看成由两个Q_{k-1}在互相对应的顶点连边而得，由此归纳地证明$\kappa(Q_k)=k$)。

2.1.22　(a) 设$k>0$，又G是k边连通图，边集E'满足$|E'|=k$，证明$\omega(G-E')\leqslant 2$。

(b) 给出一个k连通图($k>0$)，其中存在顶点集V'满足$|V'|=k$，$\omega(G-V')>2$。

2.1.23　证明如果G是k边连通图，则$\varepsilon\geqslant kv/2$。

2.1.24　证明对于任何阶大于2的3次图都有$\kappa=\lambda$(提示：对$\kappa=0$(不连通)以及$\kappa=1$、2、3分别说明$\kappa=\lambda$。对于$\kappa=2$的情形，设$\{v_1,v_2\}$是G的顶点割，$G-v_1=G_1$连通，G_1-v_2不连通，因$d_{G_1}(v_2)\leqslant 3$，故G_1有割边e_1。$\{v_1\}$是连通图$G-e_1$的顶点割，因$d_{G-e_1}(v_1)\leqslant 3$，故$G-e_1$有割边$e_2$。$\{e_1,e_2\}$是$G$

的边割).

2.1.25 对于任何满足

$$0<l\leqslant m\leqslant n$$

的整数 l、m、n,求出一个满足 $\kappa=l$,$\lambda=m$,$\delta=n$ 的简单图.

2.1.26 设整数 k 和 l 满足 $1\leqslant k\leqslant l$,构造图 G_1和G_2 满足

(a) 对某一个顶点 x 有 $\kappa(G_1)=k$,$\kappa(G_1-x)=l$;

(b) 对某一条边 xy 有 $\kappa(G_2-x)=k$,$\lambda(G_2-xy)=l$.

2.1.27 设简单图 G 的阶 $\nu\geqslant k+1\geqslant 2$,又 G 不是 k 连通图. 证明 G中有顶点集V_1,V_2,满足 $V_1\cap V_2=\varnothing$, $|V_1|=\nu_1\geqslant 1$, $|V_2|=\nu_2\geqslant 1$, $\nu_1+\nu_2+k-1=\nu$,使得 V_i中任何一个顶点的度$\leqslant \nu_i+k-2(i=1,2)$.

2.1.28 设简单图 G 的度序列满足 $d(v_1)\leqslant d(v_2)\leqslant\cdots\leqslant d(v_\nu)$. 如果关于某个 $k(1\leqslant k\leqslant \nu-1)$ 有不等式

$$d(v_j)\geqslant j+k-1\quad (j=1,2,\cdots,\nu-1-d(v_{\nu-k+1}))$$

证明 G 是 k 连通图. (提示:如果从 G 中删除 $k-1$ 个顶点后得到两个没有公共顶点的图 G_1和 G_2,一定有顶点 v_l($l\geqslant \nu-k+1$)在某 G_i(设为 G_1)中,于是 $\nu_1=|V(G_1)|\geqslant d(v_{\nu-k+1})+1$, 从而 $\nu_2=|V(G_2)|\leqslant \nu-k-d(v_{\nu-k+1})$, 因此$v_{\nu_2}$,$v_{\nu_2+1}$,$\cdots$,$v_\nu$ 都不可能是 G_2的顶点,故 $\nu_2\geqslant(\nu-\nu_2+1)-(k-1)=\nu-\nu_2-k+2$,这与 $\nu_1+\nu_2+k-1=\nu$ 矛盾.)

2.1.29 设简单图 G 的度序列满足 $d(v_1)\leqslant d(v_2)\leqslant\cdots\leqslant d(v_\nu)=\Delta$. 如果有不等式

$$d(v_j)\geqslant j\quad (j=1,2,\cdots,\nu-1-\Delta)$$

证明G是连通图.

2.2 欧拉图

1736年,欧拉(L.Euler,1707—1783)在俄国彼得堡科学院院报上发表了一篇论文,证明柯尼希堡(Königsberg)七桥问题无解. 在这篇论文里引进了图的概念,从而标志了图论这门学科的诞生.

柯尼希堡现在是苏联的加里宁格勒市,历史上曾是德国东普鲁士省的省会,普列格尔(Pregel)河穿城而过,河中有两个小岛,

岛与河岸及岛与岛之间有七座桥(图2.6).

当时流传很广的一个难题是:能否从河两岸或两个小岛中的任何一处出发,经过每一座桥一次且仅仅一次,再返回到出发点.欧拉把七桥问题化成了数学问题. 两岸与两个岛各用一个点来表示,当两片陆地间有一座桥连接时,就在相应的点之间连一条边,这样就得到图2.7.七桥问题相当于能否用一支铅笔从图2.7A、B、

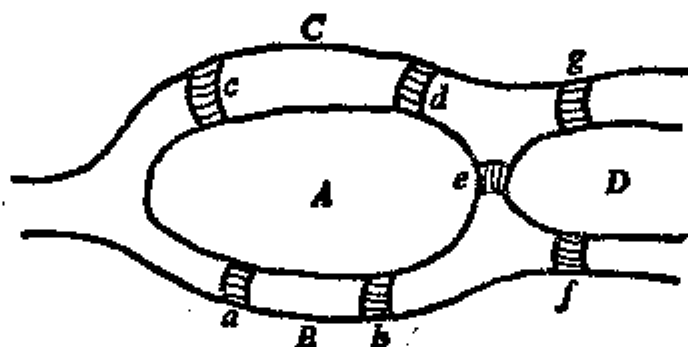


图 2.6

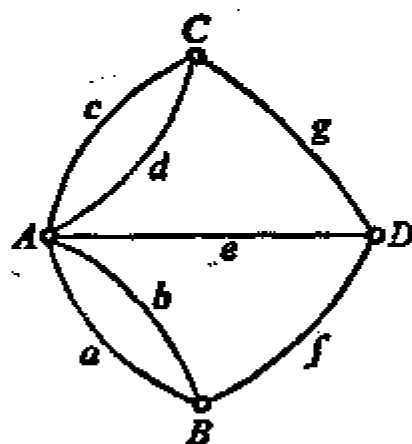


图 2.7

C、D 四个顶点中的任何一个出发,描过图的每一条边一次且仅仅一次,其间铅笔不许离开纸面,再返回到出发的顶点. 如果用 2.1 节中引进的闭迹的概念,就是问图2.7中是否存在包含一切边的闭迹.

如果图 G 中有包含一切边的闭迹,则称 G 为**欧拉图**,而这样的闭迹称为 G 的**欧拉闭迹**. 如果 G 中有包含一切边的迹,则称 G 为**半欧拉图**. 包含 G 中一切边的迹称为**欧拉迹**. 显然,每一个欧拉图都是半欧拉图. 图2.8(a)中画出的是一个欧拉图,图 2.8 (b)不是欧拉图,但却是一个半欧拉图.

具有两个或两个以上的非空迹通分支的图显然不可能是欧拉图,故欧拉图只可能由一个非空的迹通分支和一些孤立的顶点构成. 因此,在研究欧拉图时,可局限于讨论图 G 是非空连通图的情形.

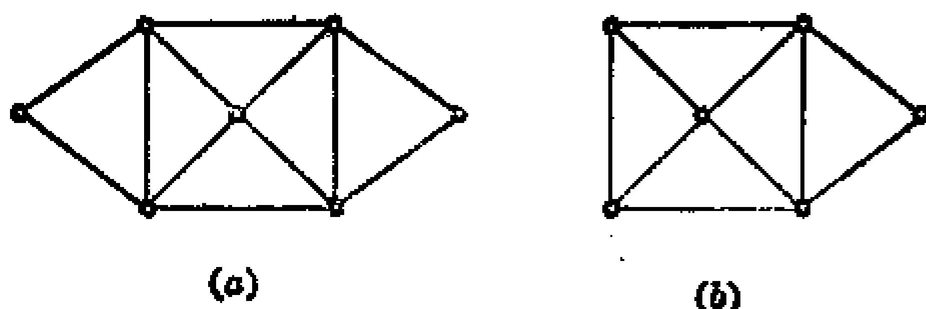


图 .8

一个十分自然的问题是：能否找到图是欧拉图的充要条件？在1736年关于柯尼希堡七桥问题的论文中欧拉已经回答了这个问题．在给出这个充要条件之前，先证明一个简单引理．

引理 2.6 如果图 G 中每个顶点的度至少等于 2，则 G 中一定有圈．

证 如果 G 中有环或重边，引理的结论显然成立，因此只需就 G 是简单图的情形给出证明．从 G 的任一个顶点 v_0 出发，选 v_1 是 v_0 的邻点，v_2 是 v_1 的不同于 v_0 的邻点，v_3 是 v_2 的不同于 v_1 的邻点，等等．因 G 简单，又 $\delta(G)\geqslant 2$，一定存在 v_{k-1} 的邻点 v_k，v_k 与 v_{k-2} 不同．这就得到 G 中的途径 $v_0v_1v_2\cdots v_k$．由于 G 的顶点的数目有限，上述过程中必然会有顶点重复出现．假定 v_l 是第一个重复出现的顶点，则在上述途径中从 v_l 到 v_l 的那一段就是 G 中的圈．□

定理 2.7 非空连通图 G 是欧拉图的充分必要条件为 G 的每一个顶点的度都是偶数．

证 必要性 设 T 是 G 的欧拉闭迹．从顶点 v_0 出发沿 T 返回到 v_0．设顶点 $v\neq v_0$．因 G 连通，在上述过程中必然经过 v，每通过 v 一次用到与 v 关联的两条边，从而对顶点 v 的度的贡献为 2．又每次经过 v 所用到的边都不同且 T 中包含与 v 关联的一切边，设经过 v 共 k 次，显然 $d(v)=2k(k\geqslant 1)$．设上述过程中穿过顶点 v_0 共 l 次，因从 v_0 出发沿 T 最后返回到 v_0，故 $d(v_0)=2l+2(l\geqslant 0)$．故 G 的每一个顶点的度是偶数．

充分性 对 G 的边数进行归纳. 如果 G 只有一条边,这时 G 只有唯一的顶点 v,而 G 是 v 上的一个环,从而 G 是欧拉图. 考虑边数大于1的情形.因 G 是非空连通图,必有 $\delta(G)\geqslant 2$, 由引理2.6可知 G 中一定含圈 C.如果 C 包含 G 中的一切边, 定理已获证.如果除 C 中的边外 G 还有其它的边,则 $G-E(C)$ 非空并且每个顶点的度仍然是偶数. 由归纳法可知 $G-E(C)$ 的每一个非空连通分支 H 都是欧拉图. 每一个 H 和 C 都有公共顶点. 可构造 G 的欧拉闭迹 T 如下:从 C 上的一个顶点 v_0 出发沿 C 行进,当遇到 H 中的顶点 v 时,转而沿 H 中的欧拉闭迹行进再返回到 v. 继而沿 C 行进,直到与 $G-E(C)$ 中的下一个非空连通分支 H' 的顶点相遇时转而沿 H' 的欧拉闭迹行进,依此下去直到返回 v_0 为止,这样得到的显然是 G 的欧拉闭迹 T. □

推论2.8 非空连通图是半欧拉图的充要条件是其中最多有两个顶点的度是奇数.

证 设 G 是半欧拉图,T 是 G 的欧拉迹,u 是 T 的起点,v 是 T 的终点,与定理2.7必要部分的推理完全类似,容易看出除了 u 和 v 可能例外,G 中其余的顶点的度一定是偶数.

反之,如果 G 的每一个顶点的度都是偶数,由定理2.7,G 是欧拉图,从而是半欧拉图. 如果 G 中有度为奇数的顶点,由推论1.2,恰有两个这样的顶点,记为 u 和 v.在 G 中添加边 uv 而得到的图 $G+uv$ 的每一个顶点的度都是偶数,于是 $G+uv$ 中有欧拉闭迹 T,$T'=T-uv$ 是 G 中以 u 和 v 为端点的欧拉迹,故 G 是半欧拉图. □

推论2.9 非空连通图 G 是欧拉图的充分必要条件是 G 可以表示为没有公共边的圈的并.

证 充分性显然, 因为这时 G 的每一个顶点的度一定是偶数.

反之, 如果 T 是图 G 的欧拉闭迹,则 T 中必有圈,且删去任

一个圈中的全部边后，剩下的图的每一个非空连通分支仍然是欧拉闭迹，因此 T 可以分解为没有公共边的圈的并. □

从推论2.9立即得到下面的

推论2.10 非空连通图是欧拉图的充分必要条件是 G 的每一个边割都由偶数条边构成.

证 必要性. 设$[S,\bar{S}]$是 G 的边割，又 T 是 G 的欧拉闭迹. 假定从 S 中的顶点 v_0 出发，沿 T 行进，通过 G 中的一切边之后返回 v_0. 沿 T 行进的过程中通过$[S,\bar{S}]$的每一条边恰好一次. 当由 S 进入 $\bar{S}$ 时用到$[S,\bar{S}]$中的一条边，从 $\bar{S}$ 返回到 S 时又用到$[S,\bar{S}]$中的一条边，故每往返一次用到$[S,\bar{S}]$中的一对边，因此$[S,\bar{S}]$的边数为偶数.

充分性. 设 v 是 G 的任一顶点，令 $S=\{v\}$. 这时的边割$[S,\bar{S}]$由与 v 关联的一切连杆构成，故与 v 关联的连杆一共有偶数条. 又因附着在 v 上的每一个环对顶点 v 的度的贡献为2，因此 $d(v)$ 是偶数. 由定理2.7可知 G 是欧拉图. □

定理2.7、推论2.9和推论2.10是通常引用的关于图是欧拉图的充要条件. 从1736年开始，关于欧拉图的研究已有二百余年的历史，但前不久竟然又发现了一个关于图 G 是欧拉图的十分简洁、优美的充要条件，这的确是令人深感意外的.

1973年Toida证明包含欧拉图中任何一条边的圈的总数为奇数. 1984年，麦基((T. A. Mckee)通过研究二元拟阵，证明了这个条件还是充分的. 他们得到的结果可叙述如下.

定理 2.11 非空连通图 G 为欧拉图的充分必要条件是 G 的任何一条边都总共在图中的奇数个圈上.

证 因为环是长为1的圈，且图中包含环的圈只有环自身，故只需就 G 中无环的情形证明定理2.11.

必要性 设 $e=uv$ 是 G 的任一条边，令 $G'=G-e$. 考虑G'中以 u 为起点，v 为终点，且顶点 v 在其中仅仅出现一次的一切

迹．首先，因 $d_{G'}(u)$为奇数，故在 G' 中可以引出奇数条以 u 为起点长度为1的迹(即奇数条与 u 关联的边)．如果$T=uw$是前述的一个迹，又 $w\neq v$．与 w 关联且不同于 uw 的边共奇数条，因此由 T 可再延伸而得到奇数条以 u 为起点的长为2的迹．由于 G' 中除 u 和 v 之外一切顶点的度都是偶数，因此如果延伸后得到的迹的终点 w 不是 v，就有奇数条与 w 关联且在迹中从未出现过的边可供选择，从而可继续延伸而得到奇数条长度增加1的迹．经过有限次延伸后一切迹都会到达 v，而每延伸一次都从一个迹演化出奇数个长度增加1的迹，因此 G'中从 u 到 v 且在其上 v 仅仅出现一次的一切迹的总数为奇数．设 T_1 是前述的迹中一个包含圈的迹，又 $C=v_1v_2\cdots v_nv_1$ 是沿 T_1 从 u 到 v 时第一个出现的圈．如果在 T_1 中把沿圈 C 行进的方向颠倒过来，即在 T_1 中以 $v_1v_nv_{n-1}\cdots v_2v_1$ 来代替 C，就得到从 u 到 v 的另一个迹 T_2．因此可以按照上面的方式把含圈的迹成对地匹配起来，故这样的迹共有偶数个．从而G'中以 u 为起点，v 为终点，且在其上 v 只出现一次的路的总数为奇数．每一条这样的路添加 e 就得到 G 中含 e 的圈，因此G 中含 e 的圈的总数为奇数．

充分性 任取$v\in V(G)$，又 e 是与 v 关联的边．以 $k(e)$表示 G 中含 e 的圈的总数．由于G中过 v 的圈必定同时包含与 v 关联的两条边，因此若以 $m(v)$表示 G 中通过 v 的圈的个数，有等式

$$\sum k(e)=2m(v)$$

等式左边的求和号表示对于与 v 关联的一切边 e 求和．由于 $k(e)$都是奇数，因此与 v 关联的边为偶数条，即 $d(v)$ 为偶数．由定理2.7，G 是欧拉图．□

返回来考虑柯尼希堡七桥问题(图2.7)．这时 A、B、C、D 四个点的度都是奇数，因此图2.7不仅不是欧拉图，也不是半欧拉

图．这就是说，在柯尼希堡七桥问题中，即使不要求返回到出发点，只要求经过每一座桥一次且仅仅一次，同样是办不到的．在有关数学游戏的书中欧拉图问题常以一笔画问题出现：如果不允许笔尖离开纸面又任何线条不允许重复，问能否画出一个给定的图？如果能够画出，则称这个图可以**一笔画**．显然一个图可以一笔画的充要条件为它是半欧拉图，即其中最多有两个顶点的度是奇数．由此容易看出，图2.9(a)中的图可以一笔画，而(2.9)(b)中的图不能一笔画．

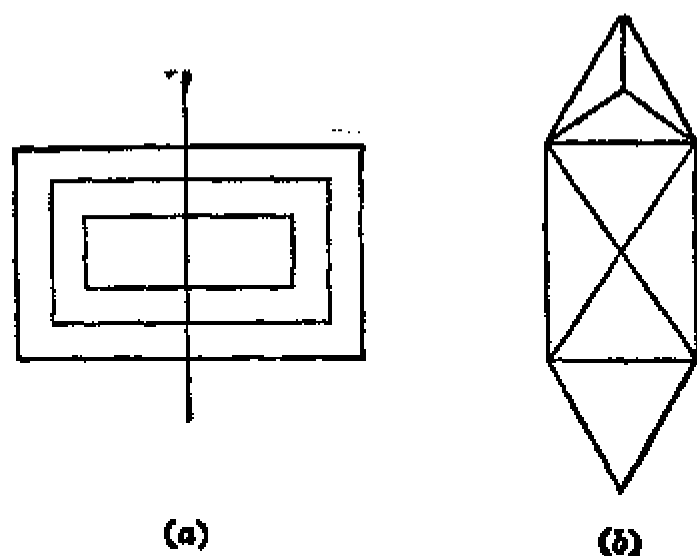


图 2.9

以下给出一个在欧拉图中求欧拉闭迹的算法，这就是**弗劳瑞(Fleury)算法**．

定理2.12(弗劳瑞算法) 设G是一个连通欧拉图，则下面的算法给出G的欧拉闭迹．

(1) 任选顶点v_0，令$W_0=v_0$；

(2) 设已经选定了迹$W_i=v_0e_1v_1\cdots e_iv_i$．从$E\backslash\{e_1,\cdots,e_i\}$中选边$e_{i+1}$满足：

(i) e_{i+1}与v_i相关联，

(ii) 除非别无选择，e_{i+1}不是$G_i=G-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$的割边；

(3) 当(2) 中的步骤不能进行下去时算法终止。

证 设$W_n=v_0e_1v_1\cdots v_{n-1}e_nv_n$是 G 中由弗劳瑞算法构造出的迹。因 G 的每一个顶点的度是偶数，只可能 $v_n=v_0$，故 W_n 是闭迹。又顶点 v_0 在图 G_n 中的度为零。

如果 W_n 不是欧拉闭迹，G_n 中就有非空连通分支，每一个这样的分支 H 都是欧拉图并且与 W_n 有公共顶点。以 S 记一切这样的公共顶点所构成的集合。因 v_0 是 G_n 中的孤立顶点，故 $v_0=v_n\notin S$。假定 m 是最大整数，使得 $v_m\in S$，则$1\leqslant m\leqslant n-1$。显然，在 G_m 中 v_m 和 v_{m+1}同在一个连通分支内。因 $v_m\in S$，又 $v_{m+1},v_{m+2},\cdots,v_n$ 都不属于 S，在 G_m-e_{m+1} 中 v_m 和v_{m+1} 不可能在同一个连通分支内。故 $\omega(G_m-e_{m+1})>\omega(G_m)$。由引理2.2可知，$e_{m+1}$ 是G_m 的割边。根据 v_m 的定义，G_n 中有一非空连通分支 H 与 v_m 有公共顶点，于是 G_m中有一条边 $e\in E(H)$，e和顶点 v_m 相关联。H 是一个欧拉图，它可以分解为互无公共边的圈的并(推论2.9)，于是 e 在 G_m 中的一个圈上。根据引理2.3，e 不是G_m 中的割边。故 e_{m+1}的选择违背弗劳瑞算法第(2)步的(ii)。这就引出了矛盾。参阅图2.10。□

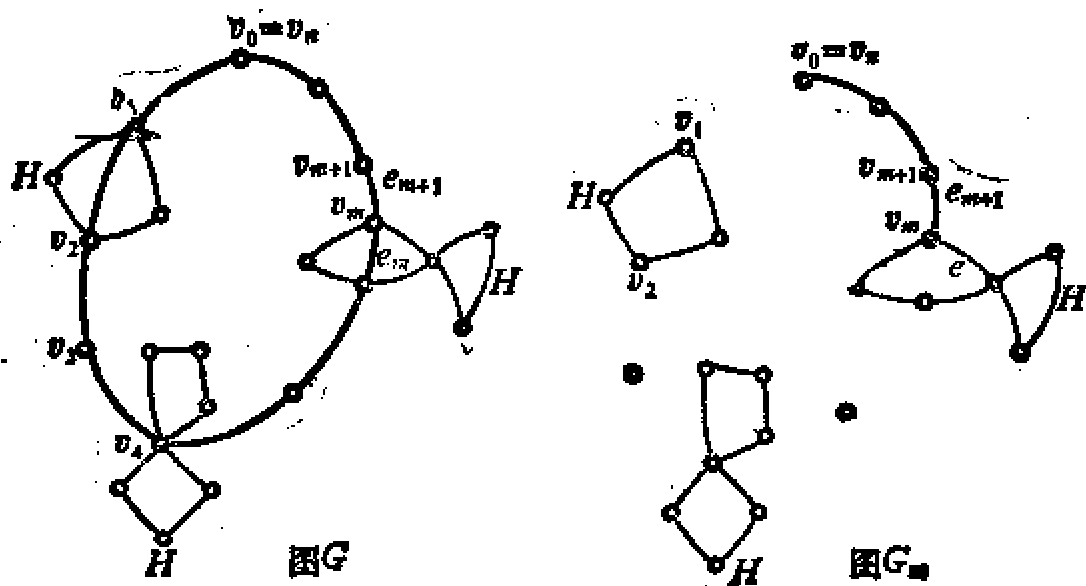


图 2.10

可以把展览会中展览走廊的平面布置看成一个图。走廊对应于图的边，而若干走廊交汇的地方看成图的顶点．当所对应的图是欧拉图时，观众就可以从入口出发，通过每一条走廊正好一次，返回到入口(同时也是出口)．由弗劳瑞算法可以看出，为使每一条展览走廊都恰好经过一次，即在对应的欧拉图中走出的路线恰好是欧拉闭迹，必须按一定的规则行进(例如按弗劳瑞算法中的规则)，随便走是不行的．但是，可以适当布置展览走廊，只要避开已经参观过的走廊，就可以保证走出欧拉闭迹，图 2.11(a)中画出的就是一个满足上面要求的展览走廊布置图，v既是出口也是入口。

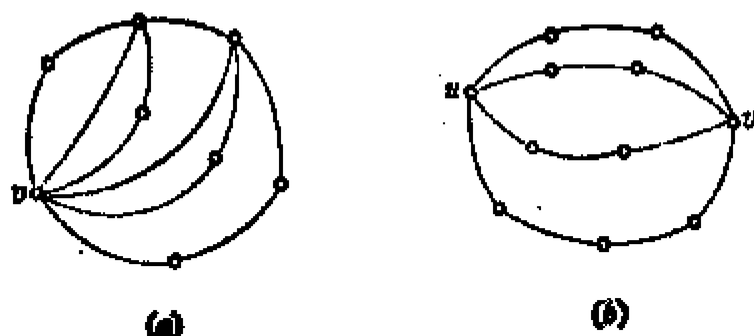


图 2.11

这就引出了关于某个顶点 v (同时对应于展览会的出口和入口)的随机欧拉图的概念．设 G 是非空连通图．如果 G 中以 v 为起点的任何一个极大迹(即以 v 为起点的不可再延伸的迹)都是 G 的欧拉闭迹，则称 G 是关于顶点 v 的随机欧拉图．

不难证明下面的两个结果，

(I) 非空连通图 G 是关于顶点 v 的随机欧拉图的充分必要条件是：

1．G 是欧拉图；

2．顶点 v 在 G 的每一个圈上．

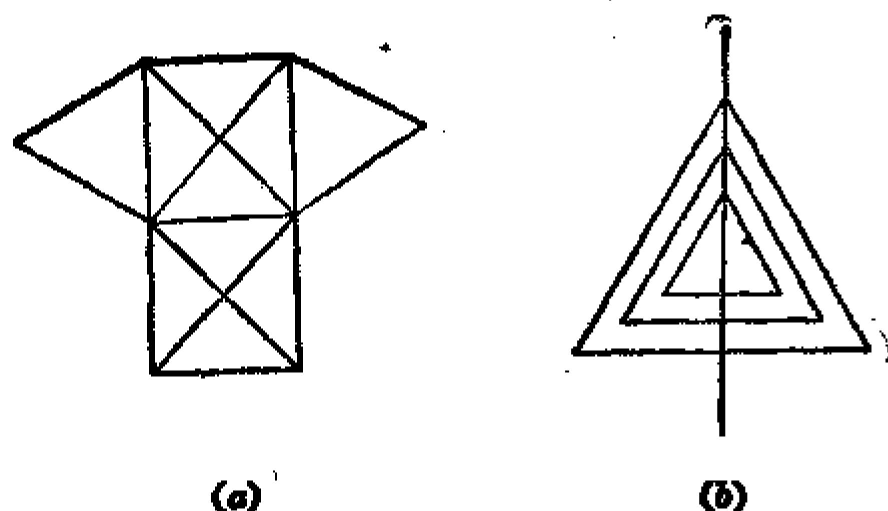
(II) 设 u、v是非空连通图 G 中两个不同的顶点，图 G 是同时关于顶点 u 和 v 的随机欧拉图的充分必要条件是：G 可以表

为偶数条从 u 到 v 的无公共内点的道路的并(图2.11(b))。

这两个结果的证明留为习题(习题2.2.6与2.2.7)。

习　题

2.2.1　证明图 2.12 中的两个图都可以一笔画并确实把它们一笔画出来。



(a)　　　　(b)

图 2.12

2.2.2　是否有 ν 为偶数，ε 为奇数的欧拉图？如果没有这样的图，给出理由；如果有这样的图，给出实例。

2.2.3　证明简单欧拉图的线图 $L(G)$是欧拉图。又若 $L(G)$ 是欧拉图，问 G 是否一定为欧拉图？

2.2.4　设连通图 G 共有 k 个度为奇数的顶点。证明 G 可以分解为 $k/2$ 个互无公共边的迹的并，且 $k/2$是这样的分解式中迹的最小可能的数目。

2.2.5　设 G 是有可数多条边的无限图。证明，G 中存在一组圈，使得 G 的每一条边只属于这些圈中的某一个圈的充分必要条件是对于 $V(G)$的任何真子集 X,$[X,\overline{X}]$要么有偶数条边，要么有无穷多条边。

2.2.6　证明非空连通图 G 是关于顶点 v 的随机欧拉图的充分必要条件是 G 为欧拉图，且 v 在 G 的每一个圈上。

2.2.7　证明非空连通图 G 是同时关于顶点 u 和 v ($u\neq v$)的随机欧拉

图的充分必要条件是 G 可以表示为偶数条从 u 到 v 互无公共内点的道路的并.

2.3 汉密尔顿图

1856 年，英国数学家汉密尔顿(W. R. Hamilton,1790～1868)发明了一个游戏，把一个木制的十二面体的二十个顶点标记上二十个重要城市的名字，要求从一个城市出发，沿十二面体的棱行进，走遍所有的二十个城市，又每一个城市在途中只准经过一次，最后返回到出发点. 正十二面体共有十二个面，每一个面是正五边形，顶点总共二十个，每个顶点恰好是三条棱的交点，见图2.13.

正十二面体的顶点与棱的关系可以在平面上表示出来，这就得到图 2.14 中的十二面体图.

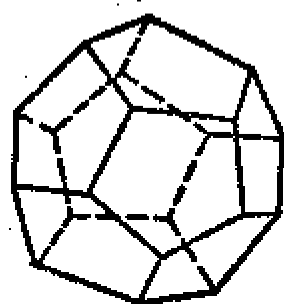


图 2.13

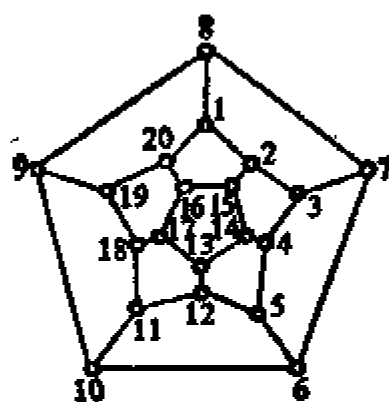


图 2.14

问题相当于在图 2.14 中找一个圈，它通过图中一切顶点. 图 2.14 中按自然顺序用数字标示的顶点列就是这样的圈，研究一般的图在什么条件下存在这样的圈正是这一节所关心的问题. 如果图 G 中存在包含一切顶点的圈 C，则称 G 为汉密尔顿图，而 C 称为 G 的汉密尔顿圈. 如果图 G 中有包含一切顶点的路 P，则称 G 是半汉密尔顿图，而 P 称为 G 的汉密尔顿路. 显然，汉密尔顿图必是半汉密尔顿图. 图 2.15(a)是汉密尔顿图；2.15(b) 是半汉密尔顿图但不是汉密尔顿图.



图 2.15

定理 2.7 给出了图是欧拉图的充分必要条件. 自然希望对汉密尔顿图也求出一个非平凡的充分必要条件. 然而这是图论中一个很困难的问题，迄今尚未解决.

我们首先给出一个简单但却有用的必要条件.

定理 2.13

(1) 如果 G 是汉密尔顿图，则对 V 的任何非空真子集 S 成立

$$\omega(G-S)\leqslant|S| \tag{2.3}$$

(2) 如果 G 是半汉密尔顿图，则对 V 的任何真子集 S 成立

$$\omega(G-S)\leqslant|S|+1 \tag{2.4}$$

证 先证(1) 设 C 是 G 的汉密尔顿圈，显然有

$$\omega(C-S)\leqslant|S|$$

由于 $C-S$ 是 $G-S$ 的支撑子图，故

$$\omega(G-S)\leqslant\omega(C-S)\leqslant|S|$$

(2)的证明与(1)的证明类似，代替 C 取汉密尔顿路 P 即可. □

例 1 赫歇尔(Hershel)图(图2.16)不是汉密尔顿图，因若以 S 表示图中有标记⊗的顶点的集合，式(2.3)不成立.

例 2 图(图2.17)不是半汉密尔顿图. 因若以 S 表示有标记⊗的顶点的集合，式(2.4)不成立.

以下研究图 G 是汉密尔顿图的充分条件. 由于 G 是汉密尔顿

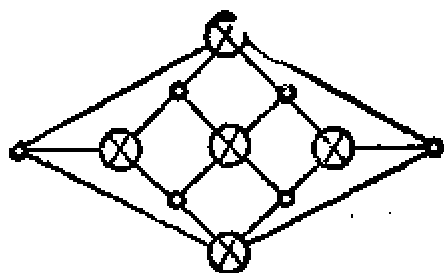


图 2.16

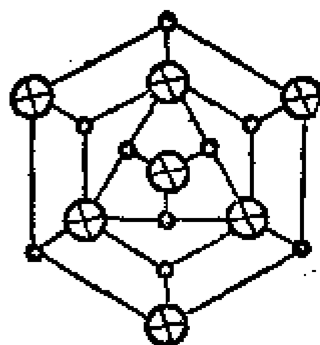


图 2.17

图的充要条件是它的底图为汉密尔顿图，因此可限于研究简单图的情形.

定理 2.14(奥尔(O. Ore)) 设 G 是阶 $\nu\geqslant3$ 的简单图. 如果 G 中任何两个不相邻的顶点 u 和 v 都满足

$$d(u)+d(v)\geqslant\nu \tag{2.5}$$

则 G 是汉密尔顿图.

证 反证 如果 G 不是汉密尔顿图，取 G 为一切满足(2.5)的 ν 阶非汉密尔顿图中边数最多的一个. 因阶 $\nu\geqslant3$ 的完全图有汉密尔顿圈，故 G 不可能是完全图. 设 u 和 v 是 G 中两个不相邻的顶点. 由边数最多的假定可知 $G+uv$ 是汉密尔顿图，且其中的汉密尔顿圈一定包含边 uv. 因此 G 中有从 u 到 v 的汉密尔顿路 $v_1v_2\cdots v_\nu$. 这里记 $u=v_1$，$v=v_\nu$. 设

$$S=\{v_i\mid v_1v_i\in E\},\quad T=\{v_i\mid v_{i-1}v_\nu\in E\}$$

因 G 是简单图，显然有 $|S|=d(v_1)=d(u)$，$|T|=d(v_\nu)=d(v)$. 又因 v_1 和 v_ν 不相邻，故 $S\subseteq\{v_2,v_3\cdots,v_{\nu-1}\}$，$T\subseteq\{v_3,v_4,\cdots,v_\nu\}$，因此，$S\cup T\subseteq\{v_2,v_3,\cdots,v_\nu\}$. 故

$$|S\cup T|\leqslant\nu-1$$

又 $S\cap T=\varnothing$. 事实上，如果 $v_i\in S\cap T$，$v_1v_2\cdots v_{i-1}v_\nu v_{\nu-1}\cdots v_iv_1$ 将是 G 中的汉密尔顿圈(图 2.18)，这与 G 不是汉密尔顿图的假定

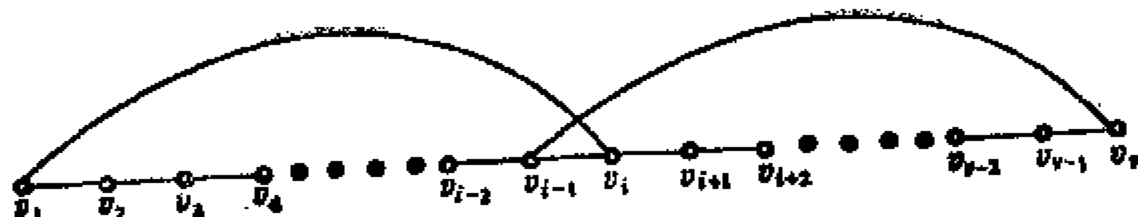


图 2.13

矛盾.

因此有

$$\begin{aligned} \nu \leqslant d(v_1)+d(v_\nu) &= |S|+|T| \\ &= |S\cup T|+|S\cap T| \\ &= |S\cup T| \leqslant \nu-1 \end{aligned}$$

矛盾. □

推论 2.15（迪拉克(G. A. Dirac)） 设G是阶$\nu\geqslant 3$的简单图. 如果$\delta(G)\geqslant \nu/2$,则G是汉密尔顿图.

证明 这是定理 2.14 的直接推论. 因G中的任何两个顶点u和v,无论其相邻与否,都满足(2.5). □

很自然会提出问题：如果用

$$d(u)+d(v)\geqslant k \quad (1\leqslant k\leqslant \nu-1)$$

来代替(2.5)式,关于图G能得到什么样的结论？为了讨论这个问题，先证明下面的引理.

引理 2.16 设G是ν阶连通图,又$1\leqslant k\leqslant \nu-1$. 如果$G$中有长为$k$的圈,则$G$中必有长为$k$的路.

证 设$v_1v_2\cdots v_kv_1$是G中长为k的圈,因G是连通图,又$k<\nu$,必存在不在圈上的顶点v,v与圈上的某一个顶点相邻. 记v为v_{k+1},且不妨假定v_{k+1}与v_k相邻. $v_1v_2\cdots v_kv_{k+1}$就是G中长为k的路. □

定理 2.17 设G是ν阶简单连通图,又G的任何两个不相邻的顶点u和v都满足

$$d(u)+d(v)\geqslant k \quad (1\leqslant k\leqslant \nu-1)$$

则G中有长度至少为k的路和长度至少为$\left\lceil\frac{k+2}{2}\right\rceil$的圈。

证　先证明G中存在长度至少为k的路。设$P=v_1v_2\cdots v_l$是G中最长的路，如果P是汉密尔顿路，P的长为$\nu-1\geqslant k$，P即合乎要求。如果P不是汉密尔顿路，则$l\leqslant\nu-1$。今指出G中不存在长为l的圈。事实上，如果G中有长为l的圈，因$l\leqslant\nu-1$，由引理2.16可知G中将有长为l的路，这与最长路P的长度为$l-1$矛盾。

因$P=v_1v_2\cdots v_l$是最长路，故v_1和v_l的邻点都是路P上的顶点。令

$$S=\{v_i|v_1v_i\in E\},\quad T=\{v_i|v_{i-1}v_l\in E\}$$

因G中无长为l的圈，故v_1与v_l不相邻，与定理2.14的证明完全类似，可知$|S\cup T|\leqslant l-1$，$S\cap T=\varnothing$，从而得到

$$\begin{aligned}k\leqslant d(v_1)+d(v_l)&=|S|+|T|\\&=|S\cup T|+|S\cap T|\leqslant l-1\end{aligned}$$

因路P的长为$l-1$，故P就是长度至少为k的路。

以下证明G中有长度至少为$\left\lceil\frac{k+2}{2}\right\rceil$的圈。仍然假定$P=v_1v_2\cdots v_l$是最长路。如果$l<\nu$，前已说明$v_1$与$v_l$必不相邻；如果$l=\nu$，又$v_1$与$v_l$相邻，则$G$有汉密尔顿圈，其长为$\nu\geqslant\left\lceil\frac{k+2}{2}\right\rceil$ ($1\leqslant k\leqslant\nu-1$)。因此，不管$l$是否等于$\nu$，只需考虑$v_1$与$v_l$不相邻的情形，且不妨假定$d(v_1)\geqslant d(v_l)$，故$2\,d(v_1)\geqslant d(v_1)+d(v_l)\geqslant k$，从而$d(v_1)\geqslant\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil$。于是存在$v_j$，$j\geqslant\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil+1$，$v_j$和$v_1$相邻，$v_1v_2\cdots v_jv_1$是$G$中长度至少为$\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil+1$的圈。因$\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil+1=\left\lceil\frac{k+2}{2}\right\rceil$，定理的后一部分得证。□

推论2.18　如果简单连通图G中的任何两个不相邻的顶点u

和 v 满足

$$d(u)+d(v)\geqslant\nu-1$$

则 G 是半汉密尔顿图。

推论 2.19 如果简单连通图 G 满足 $\delta(G)\geqslant\frac{\nu-1}{2}$，则 G 是半汉密尔顿图。

习　题

2.3.1 (*a*) 对哪些 n，K_n 和 W_n 是汉密尔顿图?

(*b*) 如果图 G 的顶点集 $V=V_1\cup V_2\cup V_3$，这里 V_i 不空，$V_i\cap V_j=\varnothing(i\neq j)$，又 $G[V_i](1\leqslant i\leqslant3)$ 是空图，则称 G 是三部图。又若 V_i 的任一个顶点与 V_j 的任一个顶点 $(i\neq j)$ 都有唯一的一条边相连，则称 G 为完全三部图；当 $|V_1|=r$，$|V_2|=s$，$|V_3|=t$ 的情形，记完全三部图为 $K_{r,s,t}$。问对哪些 m、n，$K_{m,n}$ 是汉密尔顿图? 设 $r\geqslant s\geqslant t$，证明 $K_{r,s,t}$ 是汉密尔顿图的充要条件是 $s+t\geqslant r$。

(*c*) 对哪些 k，Q_k 是汉密尔顿图?

2.3.2 证明：如果

(*a*) 图 G 中有割边，或

(*b*) G 是顶点数为奇数的二部图，

则 G 不是汉密尔顿图。

2.3.3 证明图（图2.19）不是汉密尔顿图.

2.3.4 设有 27 个 $1\times1\times1$ 的立方体形奶酪，堆放成 $3\times3\times3$ 的立方体. 问一只老鼠能否从角上的一块奶酪出发，打洞穿过每个奶酪恰好一次，最后到达立方体中心的那块奶酪?（提示：把立方体看成顶点，又若两立方体有一个面相邻，在其对应的顶点间连一条边.）

2.3.5 举例说明有这样的简单图 $G(\nu\geqslant3)$，满足 $\delta(G)=\frac{\nu}{2}-1$，但不是汉密尔顿图。

2.3.6 (*a*) 证明如果简单图 G 的阶 $\nu\geqslant3$，且 $\varepsilon\geqslant\binom{\nu-1}{2}+2$，则 G 是汉密尔顿图(提示：证明 G 中任意两个不相邻的顶点 u 和 v 满足 $d(u)+d(v)$

$\geq\nu$)。

(b) 举出一个边数 $\varepsilon=\binom{\nu-1}{2}+1$,但不是汉密尔顿图的简单图的例子。

2.3.7 (a) 证明如果图 G 是欧拉图或汉密尔顿图，则 G 的线图 $L(G)$ 是汉密尔顿图。

(b) 举出一个 $L(G)$ 是汉密尔顿图，但 G 既不是欧拉图也不是汉密尔顿图的例子。

2.3.8 证明 K_9 可以表为四个互无公共边的汉密尔顿圈的并(提示：取 8 个均匀分布在圆周上的顶点，任何一对顶点之间连直线段，得 K_8。图 2.20中粗线画出的是一个汉密尔顿路。每次旋转 45°，即可得到四个互无公共边的汉密尔顿路。由此不难想象如何获得 K_9 中的四个互无公共边的汉密尔顿圈.)

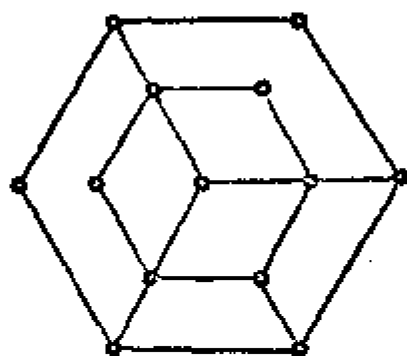


图 2.19

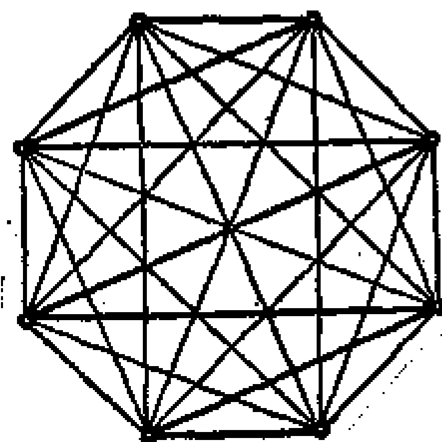


图 2.20

2.3.9 设图 G 连通,$\nu>2\delta$,证明 G 中有长度 $\geq 2\delta$ 的路。

2.3.10 (a) 如果图 G 的任何两个不同的顶点间有汉密尔顿路相连则称 G **汉密尔顿连通**。证明如果 G 的阶 $\nu\geq 4$ 且汉密尔顿连通，则 $\varepsilon\geq\left\lceil\frac{1}{2}(3\nu+1)\right\rceil$(提示：证明 G 中不存在度为 1 和 2 的顶点)。

(b) 对于 $\nu\geq 4$,给出 $\varepsilon=\left\lceil\frac{1}{2}(3\nu+1)\right\rceil$ 的汉密尔顿连通图的例子(提示：考察图 2.21)。

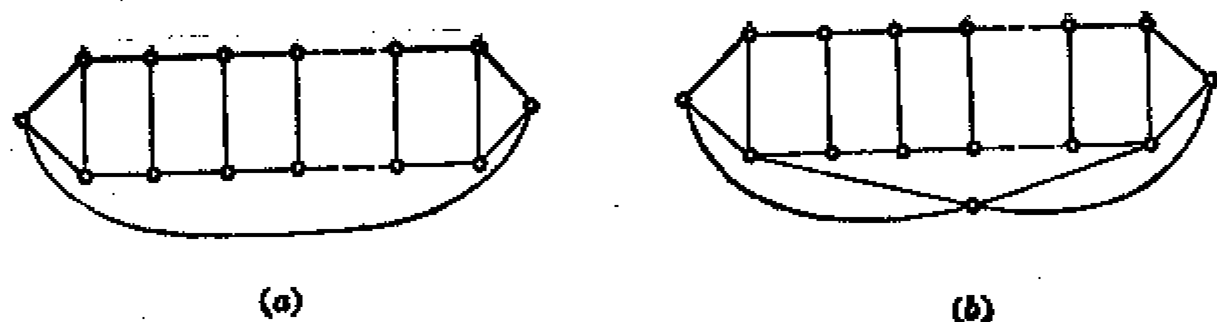


图 2.21

2.4 应用

这一节将讨论与本章讲过的理论有关的应用。

最短路问题.

假定有一幅形如图 2.22 的交通图.

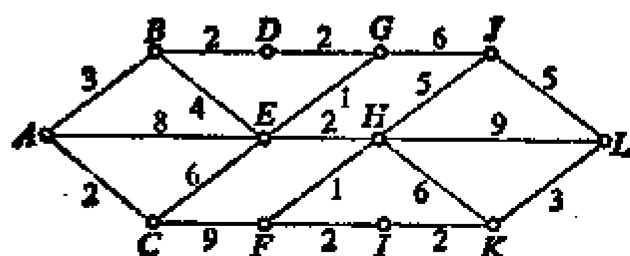


图 2.22

其中字母从 A 到 L 代表十二个城镇. 两个城镇间的路段由连接它们的边来表示，而标注在边旁的数字表示相应的路段的长度. 我们的问题是：求出图中某一个城镇(为确定起见，设为 A)到其它各城镇的最短路程.

可给图 2.22 种种不同的解释，图中边旁的数字可理解为通过相应路段花费的时间，也可解释为路段的造价或维护费等等. 这时问题将相应成为求费时最少的道路、造价最低的道路或维护费最省的道路的问题.

图 2.22 可以抽象看成一个图 G，它的每一条边都伴随着实数 $w(e)$，称为边 e 的权. 图 G 称为**赋权图**. 如果 H 是 G 的子图，称

$w(H)=\sum_{e\in E(H)} w(e)$为子图$H$的权.

显然,可限于讨论简单图的最短路问题. 因为当连接两顶点的边不只一条时,只需考虑其中权最小的边. 根据所提问题的实际背景,可以假定权 $w(e)$都是正数. 连接顶点 u 和 v 的最短路就是连接 u 和 v 的权最小的路,其权称为 u 和 v 间的距离,记为 $d(u,v)$. 如果取每一条边的权为 1 就得到 2.1 中定义的距离和最短路. 因此,那里的定义是现在的特殊情形. 最短路问题可叙述为:在边的权都是正实数的简单连通图中,求出从一个取定的顶点到任何其它顶点的距离以及相应的最短路.

戴克斯特拉(E. W. Dijkstra)在 1959 年首先给出最短路的算法. 怀廷(P. D. Whiting)和赫里尔(J. A. Hillier)在 1960 年也独立地找到了这样的算法. 下面我们将给出戴克斯特拉算法. 在给出这个算法之前,以图 2.22 为例较详细地描述一下这个算法的主要步骤.

设 $S_0=\{A\}$. 考虑与 A 关联的各条边,求出其中权最小的一条(如果这样的边不只一条,任取其中之一). 在图 2.22 中边 AC 的权最小,其值为 2. 显然,AC 是从 A 到 C 的最短路. 在顶点 A 旁标记 0,在顶点 C 旁标记 2,表示从 A 到相应的顶点的距离分别为 0 和 2. 把 AC 加粗,表示 AC 是从顶点 A 到顶点 C 的最短路. 参看图 2.23 (a).

令 $S_1=\{A,C\}$. 考虑$\bar{S}_1$中与 S_1 的顶点相邻的顶点的集合,它由 B、E、F 三个顶点构成. B 只与 S_1 中的点 A 相邻,计算出 A 经点 A 到 B 的路长为 $0+3=3$,这里 0 是顶点 A 的标数,3 是边 AB 的权. 顶点 E 既与 S_1 中的 A 相邻,又与 S_1 中的 C 相邻. 计算出 A 经点 A 到 E 的路长为 $0+8=8$, A 经点 C 到 E 的路长为 $2+6=8$. F 只与 C 相邻,计算出 A 经 C 到 F 的路长为 $2+9=11$. 取这些数中的最小值,它等于 3,是由 A 经点 A 到 B 的路长,用3标

记顶点 B，并把边 AB 也加粗．如果有若干个数都达到最小值，那么，只取其中的一个顶点标上最小数，并加粗相应的边．显然，顶点 B 的标数就是 A 与 B 之间的距离，而由粗边 AB 组成的路即为从 A 到 B 的最短路．这时，我们得到了 $S_2=\{A,C,B\}$，并得到了 S_2 中每一点的标数．参看图 2.23 (b)．

继续上面的步骤．假定经 k 步后得到图中由 $k+1$ 个顶点构成的集合 S_k，S_k 中每一个顶点 v 都已有标数 $l(v)$，表示从 A 到 v 的距离．显然，S_k 中的顶点及连接其中顶点的粗边形成一个无圈连通图，记为 $T(S_k)$，参看图 2.23．在 $T(S_k)$ 中从 A 到任何一个顶点 v 有唯一的路相连，这条路就是从 A 到 v 的最短路．无圈连通图称为树，而我们的算法就是逐步地把树加以扩充．在第三章中将对树进行研究．只要 $k<\nu-1$，S_k 中的顶点数小于 ν（在图 2.23的具体情形，$\nu=12$），$\bar{S}_k$ 就不是空集．对于图中满足 $v\in S_k$，$u\in\bar{S}_k$ 的每一条边 vu，计算 $l(v)+w(vu)$．考虑

$$\min_{\substack{v\in S_k\\ u\in\bar{S}_k}}\{l(v)+w(vu)\} \tag{2.6}$$

假定这个最小值是 $l(v)+w(vu)$．令 $l(u)=l(v)+w(vu)$，即以 $l(v)+w(vu)$ 作为 u 的标数，并把边 vu 加粗；如果取到(2.6)中的值的 v 和 u 不只一对，则任意取定其中的一对 v 和 u．令 $S_{k+1}=S_k\cup\{u\}$．这样就把树 $T(S_k)$ 扩展到树 $T(S_{k+1})$．

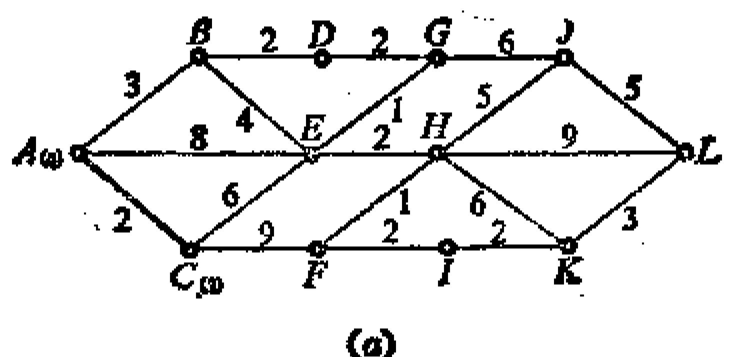
以下说明 $l(u)$ 的确是从顶点 A 到 u 的距离．设 $P=v_0v_1\cdots v_t$ 表示图中从顶点 A 到 u 的任何一条路，$v_0=A$，$v_t=u$．因 $v_0\in S_k$，$v_t\in\bar{S}_k$，故 P 必有一段 $P'=v_0v_1\cdots v_{j-1}v_j$，$j\leqslant t$，$v_{j-1}\in S_k$，$v_j\in\bar{S}_k$．因 $l(v_{j-1})$ 表示从 v_0 到 v_{j-1} 的距离，故

$$\begin{aligned} w(P)&\geqslant w(P')\geqslant l(v_{j-1})+w(v_{j-1}v_j)\\ &\geqslant\min_{\substack{v\in S_k\\ u\in\bar{S}_k}}\{l(v)+w(vu)\}=l(u) \end{aligned} \tag{2.7}$$

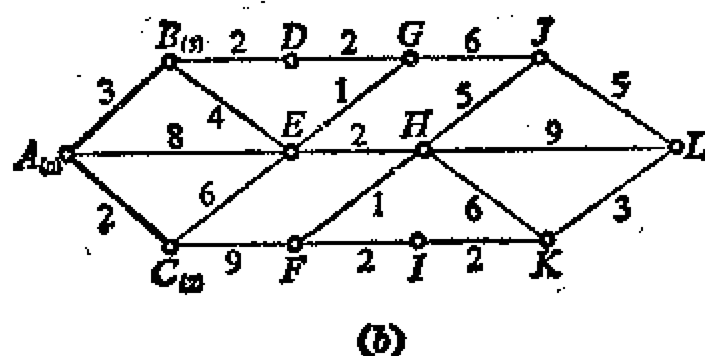
(2.7)式表明 A 与 u 之间的距离为 $l(u)$，且在 $T(S_k)$ 中由 $v_0=A$ 到 v 的路上添加边 vu 而得到的路就是从 A 到 u 的最短路．

当得到 $S_{\nu-1}$ 时，也就得到了从 A 到图中任何一个顶点的距离，它由顶点旁的标数表示，而由粗边画出的树 $T(S_{\nu-1})$ 中由 A 到任一顶点的唯一的路就是图 G 中 A 到相应的顶点的最短路．

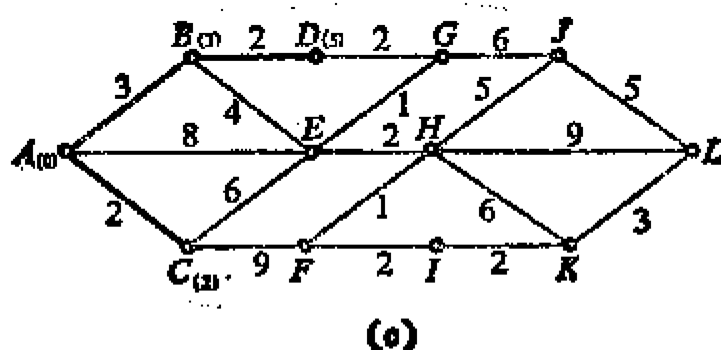
图 2.23 中从(a)到(k)的各个图画出了以上叙述的各个步骤．



(a)



(b)



(c)

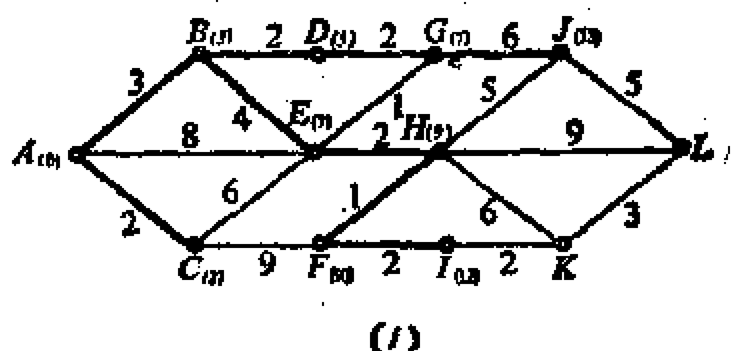
(d)

(e)

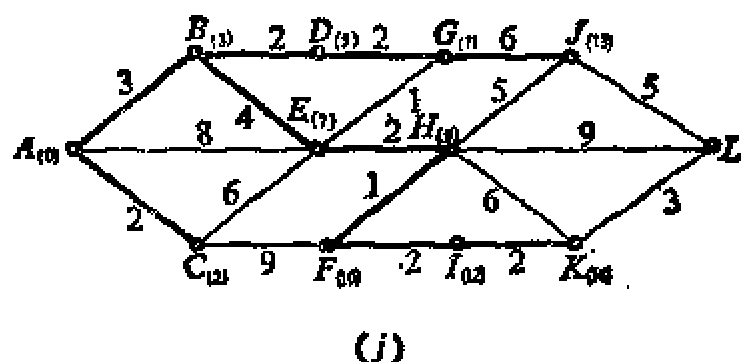
(f)

(g)

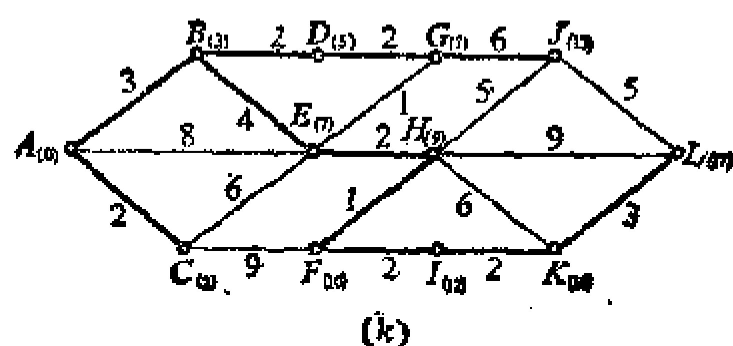
(h)



(i)



(j)



(k)

图 2.23

现在考虑一般情形，设G是一个简单连通图，它每一条边上的权都是正实数．我们还约定，如果$uv\notin E$，则$w(uv)=\infty$．设v_0是G中取定的顶点，戴克斯特拉算法的目的是求出从v_0到任何一个顶点v的距离$d(v_0, v)$，这个算法的要点已包含在上述例子中描述过的各个步骤之中，只不过更加简洁而已．当求式(2.6)中的最小值时，我们每一次都是从头算起，因而有许多不必要的重复．为了避免重复，并把算法某一步已得到的信息保留下来以便在下一步中使用，戴克斯特拉算法中采用下述对图的顶点给以标数的办法．整个算法从头到尾每个顶点都有标数$l(v)$，它是$d(v_0, v)$的

一个上界．算法开始时令 $l(v_0)=0$，对一切 $v\neq v_0$，令 $l(v)=\infty$（在实际计算时，可用任何一个充分大的数来代替 ∞）．当算法一步步进行时，不断修正各个顶点的标数．当进行到第 k 步时

$$l(v)=d(v_0,\ v),\ v\in S_k$$

而

$$l(u)=\min_{v\in S_k}\{d(v_0,v)+w(vu)\},\ u\in \bar{S}_k$$

戴克斯特拉算法

(1) 令 $l(v_0)=0$．当 $v\neq v_0$，令 $l(v)=\infty$．$S_0=\{v_0\}$．$i=0$．

(2) 对每一个 $u\in\bar{S}_i$，用 $\min\{l(u),\ l(v_i)+w(v_iu)\}$ 代替 $l(u)$．算出 $\min\limits_{u\in\bar{S}_i}\{l(u)\}$，设 v_{i+1} 是达到这个极小值的一个顶点．令 $S_{i+1}=S_i\cup\{v_{i+1}\}$．

(3) 如果 $i=\nu-1$，则停止．如果 $i<\nu-1$，由 $i+1$ 代替 i．返回到第(2)步．

当算法终止时，每一个顶点 v 的标数 $l(v)$ 就是从 v_0 到 v 的距离．如果我们要求的只是从 v_0 到某一特定顶点 u_0 的距离，当 v_i 等于 u_0 时，即可将算法终止．

需注意的是，戴克斯特拉算法只给出顶点 v_0 到图中每一个顶点的距离，并未给出最短路．如果想得到最短路，只需在求出顶点 u 的标数 $l(u)$ 的同时，记下顶点 u 关于标数 $l(u)$ 的先行顶点，其定义为当 $l(u)=l(v_i)+w(v_iu)$，称 v_i 是顶点 u 关于标数 $l(u)$ 的先行顶点，只要知道顶点 u 关于标数 $l(u)$ 的先行顶点就能一步一步把树 $T(S_k)(1\leqslant k\leqslant\nu-1)$ 造出来，从而也就得到 v_0 到每一个顶点的最短路．

中国邮递员问题．

邮递员从邮局出发，到他所负责的地段投递信件，地段中的每条街至少经过一次，然后返回邮局．应当怎样选择投递路线，使所走的路程最短？这个问题可以化成一个图论问题．如果把街看成

边，街与街的交汇处看成顶点，街的长度视为边的权，就得到一个权恒正的赋权连通图．显然，任何一条投递路线必然是包含图中每条边的闭途径．为叙述简便起见，以下称这样的闭途径为**可行邮路**，可行邮路 $v_0e_1v_1e_2v_2\cdots v_{n-1}e_nv_n(v_n=v_0)$ 的权定义为

$$\sum_{i=1}^{n} w(e_i).$$

从图论的角度看，邮递员送信问题可以叙述为：在权恒正的赋权连通图 G 中求出权最小的可行邮路．这样的邮路简称为**最佳邮路**．这就是中国邮递员问题，它是由山东师范大学的管梅谷教授在1960年提出的．

如果图是欧拉图，由于欧拉闭迹通过每条边恰好一次，因此每一个欧拉闭迹都是最佳邮路．如果图不是欧拉图，任一可行邮路中必有重复边，假如 $e=uv$ 在可行邮路中总共出现 k 次，则把 G 中的边 e 用 k 重边取代，且这些边都赋权 $w(e)$．称这样的运算为**添重边**，经添重边得到的图 G^* 是 G 的**赋权支撑母图**．由于可行邮路对应于 G^* 中的欧拉闭迹，故 G^* 是欧拉图．因此 G 的每一个可行邮路对应于添重边而得的赋权欧拉母图 G^*，反之任何关于 G 添重边而得的赋权欧拉母图 G^* 也对应于 G 中的可行邮路．因此，中国邮递员问题可归结为：

设 G 是一个权恒正的赋权连通图．

(1) 在通过添重边而造出的 G 的一切赋权欧拉母图 G^* 中，求出这样的 G^*，使其权最小(或 $\sum\limits_{e\in E(G^*)\setminus E(G)} w(e)$ 最小)；

(2) 求出 G^* 中的欧拉闭迹．

图 2.24 (a)中画出的是地段图 G，设邮局在 A 处．2.24(b)中画出的是在 G 中添重边 CD、EF 而得的赋权欧拉母图 G^*．与 G^* 相对应的可行邮路画在图 2.24(c)中．

前述邮递员问题中的(2)可用弗劳瑞算法解决．现在来看

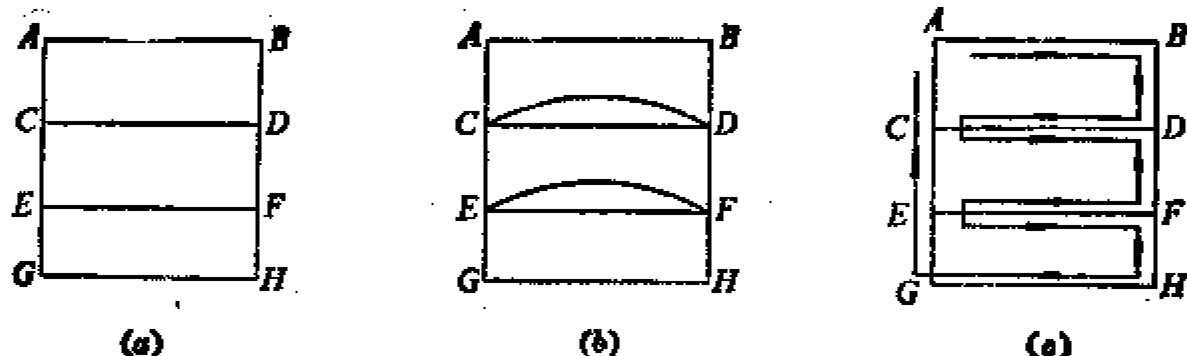


图 2.24

(1). 首先怎样求 G^*? 由推论 1.2, G 中度为奇数的顶点共偶数个,又 G^* 的每一个顶点的度是偶数. 因此,若用 $\tilde{G}$ 表示这样的图,其顶点是图 G 的一切顶点,而边是构造 G^* 时添加的一切重边. 显然, $\tilde{G}$ 的顶点的度的奇偶性与 G 的顶点的度的奇偶性相同. 任取 $\tilde{G}$ 中的一个包含度为奇数的顶点的连通分支,并任取其中的一对度为奇数的顶点 u 和 v, 任意取定 $\tilde{G}$ 中一条连接 u 和 v 的路,记为 P_{uv}. 显然, $\tilde{G}-E(P_{uv})$ 的度为奇数的顶点的个数恰好比 $\tilde{G}$ 中度为奇数的顶点的个数少 2, 且 $\tilde{G}-E(P_{uv})$ 中度为奇数的顶点都是 G 中度为奇数的顶点. 由此不难看出, $\tilde{G}$ 是一些互无公共边的迹的并,每一条迹连接 G 中一对度为奇数的顶点. 由于我们感兴趣的是求最佳邮路,不妨设 $\tilde{G}$ 中上述的各条迹都是路. 因此可按下面的方法构造 G^*: 把 G 的度为奇数的顶点两两配对,关于每对顶点在 G 中任取一条连接它们的道路,路上的每条边都添加一条重边,由此即得 G^*. 容易看出,权最小的 G^* 必须满足: (1) G 中任一条边添加的重边最多有一条; (2) G 中任何一个圈上添加的重边的权的和不能超过圈的权的一半. 首先说明(1). 事实上,如果某边 e 添加的重边多于一条,从 G^* 中去掉两条这样的重边,余下的图每一个顶点的度仍然是偶数,并可看成由 G 添重边得到,但它的权比 G^* 的权小,与 G^* 的权最小的假定矛盾. 再来看条件(2). 如果 G 中圈 C 上添加的重边的权的和大于圈的权的一半, 去掉 C 上添加的各条重边, 而对 C 上原来无重边的边

各添加一条重边．称这样的运算为圈校正．经圈校正后得到的图的每一个顶点的度仍然是偶数，并可看成由G添重边得到，但它的权比G^*的权小，矛盾．管梅谷证明上述的必要条件还是充分的，从而得到求最佳邮路的奇偶点图上作业法．

(1) 把G中度为奇数的顶点两两配对．任选G中连接每对顶点的一条路，路上的边都添重边，从而得到G的赋权欧拉母图G^*．

(2) 如果G^*中关于G的某一条边添加上的重边不只一条，则成对地删除重边，直至最多有一条重边为止．

(3) 检查G的每一个圈．如果圈上的重边的权和大于圈的总权的一半，则进行圈校正．每校正一次得到的新的G^*的权都减少．对所有的圈进行检查并校正后得到的就是权最小的G^*．

下面是一个例．图2.25(a)中画出的是图G，边旁标记的数字是边的权．我们画出的是示意图，权的数值并非与边长成比例．v、x、l、m四个顶点是度为奇数的顶点．根据奇偶点图上作业法的(1)，把x和m配对，v和l配对．连路$xtlkzm$，并对图上的每一条边添重边；又在顶点v和l间连路$vwzkl$，对路上的每一条边也添重边．这就得到图2.25(b)．2.25(b)中边lk和kz上的重边各2条，按奇偶点图上作业法的(2)，成对地去掉其上的重边，得2.25(c)．按奇偶点图上作业法的(3)，对2.25(c)中的圈$xyltx$和$vwzyv$进行圈校正得2.25(d)．对2.25(d)中的圈$uvyx$再进行圈校正一次得2.25(e)．对2.25(e)中共13个圈都检查后知2.25(e)中的图G^*合所求．

奇偶点图上作业法需检查图中的每一个圈．随着顶点数和边数的增加，圈数增长很快．例如，当图的图形为图2.26时总共有13个圈．图2.25实际上就是这种情形．

如果图为图2.27，则其中的圈数超过150个．如果图为图2.28，估计其中的圈数至少上千．因此，对一般的图要施行奇偶

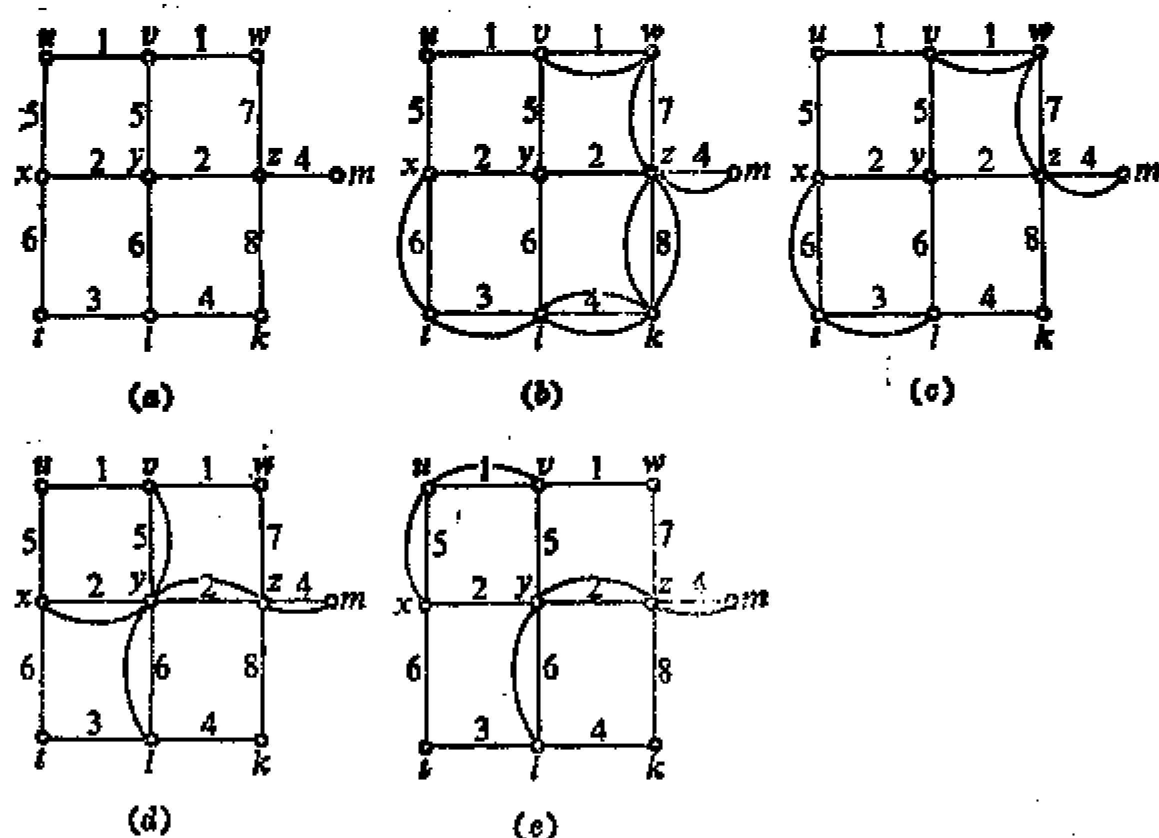


图 2.25

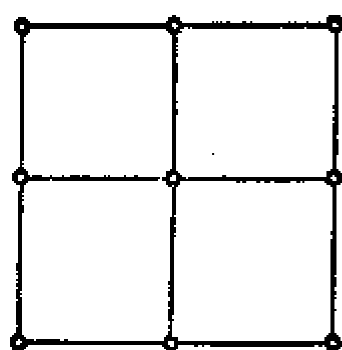


图 2.26

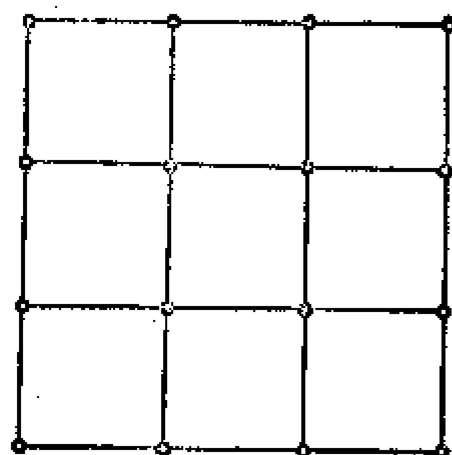


图 2.27

点图上作业法很难行得通.

如果一个图论算法对任意的图 G 的计算步数以 ν 和 e 的一个多项式为上界,则称这个图论算法是一个好算法.如果其计算步数是 ν 和 e 的指数函数或涉及 ν 和 e 的阶乘,这样的算法随着 ν 和 e 的增长其计算步数增长太快,因而效用很低. 奇偶点图上作业法

不是一个好算法．埃德蒙斯(J. Edmonds)和约翰逊(E.L. Johnson)1973 年给出中国邮递员问题的一个好算法，但这个算法相当复杂，不是本书范围内可能介绍的．

旅行推销员问题．

设有 ν 个城市 A_1、A_2、$\cdots$、A_ν．某推销员从 A_1 出发推销货物，每个城市都要走到并仅到一次，最后返回 A_1．已知任何两个城市间的距离，问应如何安排旅行，使总路程最短．图 2.29 是一个

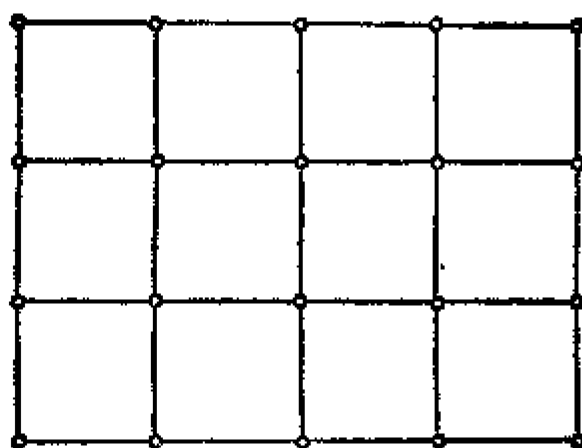


图 2.28

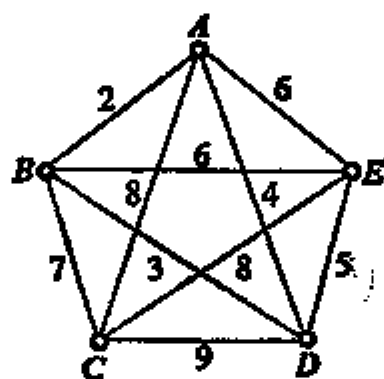


图 2.29

例子，五城市 A、B、C、D、E 间的距离如图所示．设推销员从 A出发，他离开 A后首先到达的是 B、C、D、E 四个城市中的某一个，返回A前最后离开的也是B、C、D、E中的某一个，因此推销员不同旅行安排相当于B、C、D、E 四城市按到达的先后顺序的一个排列，故一共有 $4!=24$ 种旅行安排，可以列举出这 24种安排并对每种安排计算相应的总旅程，经过比较后可以看出推销员的最佳旅行路线是 $A\to B\to D\to E\to C\to A$，其总距离为 26．

使用图的用语，旅行推销员问题可叙述为：在赋权完全图 K_ν 中求权最小的汉密尔顿圈．前述关于五个城市的例子中采用的穷举法在一般的情形无法施行．因为一共需要列举$(\nu-1)!$种不同的情况，随着 ν 的增大这个数将急剧增大，即使高速计算机也无法处理．

迄今为止还不知道旅行推销员问题的好算法，普遍认为它没有好算法．3.5 中还要返回到旅行推销员问题．

习　题

2.4.1　在赋权图 2.30 和 2.31 中分别求出顶点 A 到其它各个顶点的最短路．

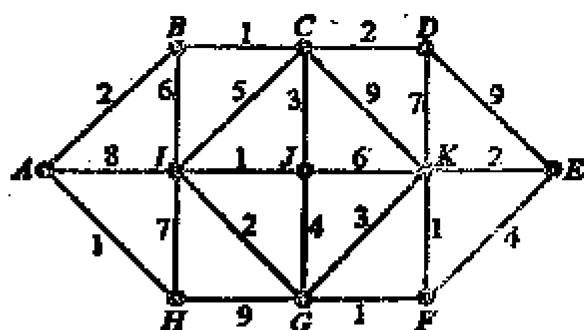


图 2.30

2.4.2　一只狼、一头羊和一株白菜同时来到河边，船夫要把它们渡到对岸．由于渡船太小，每次除船夫外只能载三者之一．显然狼和羊，羊和菜，狼、羊和菜没有船夫监护无法共处．问怎样才能把它们安全渡到对岸？

2.4.3　如果赋权图 G 只有两个顶点 u 和 v 的度为奇数，求出 G 中从 u 到 v 的最短路，并对路上的每条边各添一条重边，证明所得的赋权欧拉母图 G^* 对应于图 G 的最佳邮路．

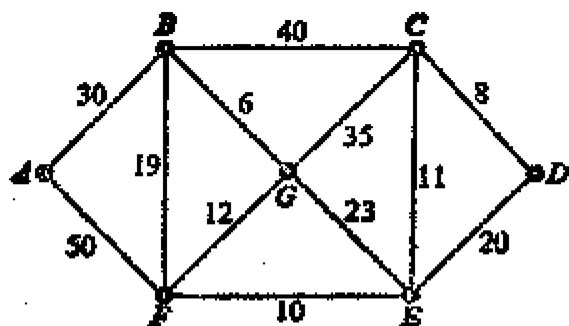


图 2.31

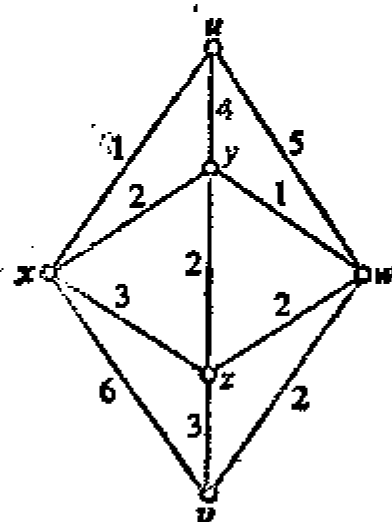


图 2.32

2.4.4 求赋权图 2.32 中的最佳邮路.

2.4.5 求出图 2.29 中完全图的权最大的汉密尔顿圈.

参考文献

Dijkstra, E. W. (1959). A note on two problems in connexion with graphs. Numer. Math., 1,269—71

Dirac, G. A. (1952). Some theorems on abstract graphs. Proc. London Math. Soc., 2,69—81

Edmonds, J. and Johnson, E. L. (1973). Matching, Euler tours and the Chinese postman. Math. Programming, 5,88—124

Euler, L. (1736). Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae, 8,128—40

(关于 Euler 的原文及有关历史参阅:

Wilson, R. J. (1986). An Eulerian trail through Königsberg. J. Graph Theory, 10,265—275)

Hamilton, W. R. (1856). Letter to John T. Graves on the Icosian. 17 Oct., 1856, in The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton (eds. H. Halberstam and R. E. Ingram), vol. 3 (Algebra), Cambridge University Press, 1931, pp. 612—25

对 Euler 图有兴趣的读者可参阅综述:

Lesniak, L. and Oellerman, O. R. (1986). An Eulerian exposition. J. Graph Theory, 10,277—297

Mckee, T. A. (1984). Recharacterizing Eulerian: Intimations of new duality. Discrete Math., 51,237—242

Ore, O. (1961). Arc coverings of graphs. Ann. Mat. Pura Appl., 55,315—21

Toida, S. (1973). Properties of an Euler graph. J. Franklin Inst, 295,343—345

Whiting, P. D. and Hillier, J. A. (1960). A method for finding the shortest route through a road network. Operational Res. Quart., 41,37—40

管梅谷, 奇偶点图上作业法, 数学学报, 3(1960),263—266

第三章　树

3.1　树和林

不含圈的图称为无圈图，无圈图又称为林．连通的无圈图称为树．显然，一个图是林的充要条件是它的每一个连通分支都是树．包含环或重边的图中一定有圈，因此树和林都是简单图．树和林不含圈，从而不含奇圈，因此由定理 2.1，它们都是二部图．好些从实际问题中导出的图是树．例如，同一祖先繁衍的后代按父系血缘关系画出的谱系图就是树，称为家族树．如果把原子看成图的顶点，而把连接原子的价键看成图的边，那么化学分子式可以很自然看成一个图．与某些化学分子式相联系的图是树，例如与烷族 C_nH_{2n+2} 相联系的图就是树．图 3.1 中画出的是与甲烷 CH_4 对应的图，它就是树．

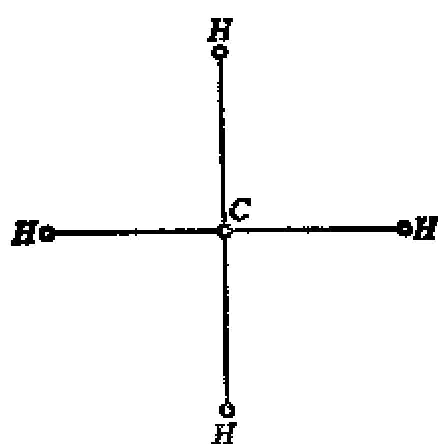


图 3.1

树的重要性不仅在于它与实际问题有联系，还在于树是最简单的图．当企图证明图论中某个一般的结果或检验某个一般的猜测时，有时先对树来找个证法，或先看一看对于树猜测是否成立．因此，弄清楚树的性质对进一步研究一般的图具有重要意义．

图 3.2 中画出的是有六个顶点的互不同构的树，从左至右的各个树中最长路的长分别为 5、4、4、3、3、2．

从图 3.2 不难看出，树正是从这一类图的形象而得名的．定理 3.1 中列举出若干能够完全刻画树的简单性质．

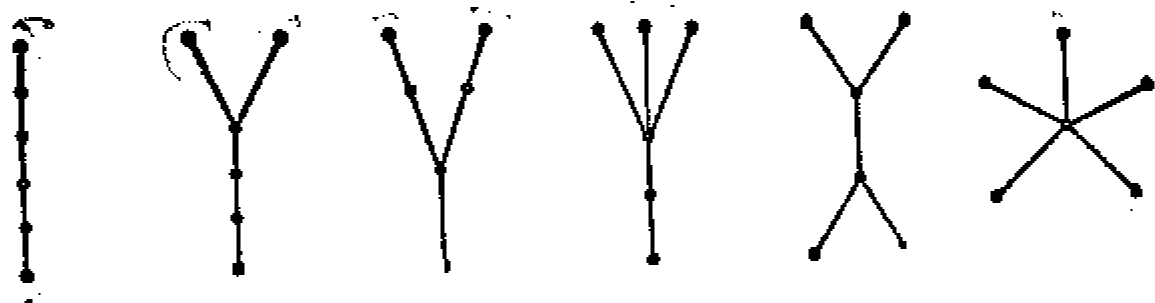


图 3.2

定理 3.1 设 T 是有 ν 个顶点的图，则下述各个命题相互等价：

(1) T 是树；

(2) T 不含圈且边数为 $\nu-1$；

(3) T 连通且边数为 $\nu-1$；

(4) T 连通且每条边都是割边（T 是极小连通图，即 T 连通但删去任何一条边后不再连通）；

(5) T 不含圈，但新添任何一条边后得到的图中将含圈（T 是极大无圈图）。

证 当 $\nu=1$ 时，定理中的各条显然都等价，因此以下假定 $\nu\geqslant 2$。

(1)⇒(2) 由定义可知 T 不含圈．通过对 ν 施行归纳法证明阶 $\nu\geqslant 2$ 的树 T 的边数为 $\nu-1$． $\nu=2$ 的树只有一条边，结论成立．因 T 不含圈，故任何一条边 e 都不在圈上，由引理 2.3 可知 T 的任何一条边 e 都是割边，再由引理 2.2，$T-e$ 由两个连通分支 T_1 和 T_2 构成．T_1 和 T_2 都是树，由归纳的假定可知 $e(T_1)=\nu(T_1)-1$，$e(T_2)=\nu(T_2)-1$，故

$$e=e(T)=e(T_1)+e(T_2)+1=\nu(T_1)+\nu(T_2)-1=\nu-1$$

(2)⇒(3) 只需证明 T 连通．设 T 的连通分支为 $T_1,T_2,\cdots,T_k(k\geqslant 2)$，$T_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 都是树，因此 $e(T_i)=\nu(T_i)-1(1\leqslant i\leqslant k)$，故 $\varepsilon=\varepsilon(T)=\varepsilon(T_1)+\cdots+\varepsilon(T_k)=\nu(T_1)+\cdots+\nu(T_k)-k=\nu-$

$k(k\geqslant 2)$，这与 $e=\nu-1$ 矛盾.

(3)⇒(4) 删去 T 中的任何一条边 e 之后，得到 ν 个顶点 $\nu-2$ 条边的图 $T-e$. 由定理 2.4 知 $T-e$ 一定不连通，即 $\omega(T-e)>\omega(T)$，再由引理 2.2，e 是割边.

(4)⇒(5) 因 T 的每条边都是割边，由引理 2.3 可知 T 不含圈. 如果新添边 xy，$T+xy$ 中含圈 $P_{xy}+xy$，这里 P_{xy} 是 T 中连接顶点 x 和 y 的路.

(5)⇒(1) 为了证明 T 是树，只需证明 T 连通，反证，如果 T_1 和 T_2 是 T 的两个连通分支，又设 $x\in V(T_1)$，$y\in V(T_2)$，则 $T+xy$ 不含圈，这与(5)矛盾. □

定理 3.1 中的(2)、(3)、(4)、(5)各条都与树的定义等价，因此它们都可当成树的定义. 例如由(4)，树可以定义为极小连通图；由(5)，树可以定义为极大无圈图.

推论 3.2 如果 F 是有 ν 个顶点 ω 个分支的林，则 F 有 $\nu-\omega$ 条边.

证 F 的每一个连通分支 $T_i(1\leqslant i\leqslant\omega)$ 都是树，故 $e(T_i)=\nu(T_i)-1(1\leqslant i\leqslant\omega)$，相加即得 $e(F)=\sum_{i=1}^{\omega}e(T_i)=\nu-\omega$. □

推论 3.3 如果树 T 的顶点数 $\nu\geqslant 2$，则 T 中至少有两个悬挂点.

证 设 T 的顶点为 v_1、v_2、…、v_ν，因 $\nu\geqslant 2$，故 $d(v_i)\geqslant 1$ $(1\leqslant i\leqslant\nu)$. 由定理 1.1 和定理 3.1

$$\sum_{i=1}^{\nu}d(v_i)=2e=2\nu-2$$

由上式可知 T 中至少有两个顶点的度为 1，否则将引出矛盾

$$2\nu-2=\sum_{i=1}^{\nu}d(v_i)\geqslant 1+2(\nu-1)=2\nu-1. \ \square$$

定理 3.4 树 T 的任何两个顶点之间有唯一的路相连.

证 反证 设顶点 u 和 v 之间有两条不同的路 P_1 和 P_2 相连. 因 $P_1 \neq P_2$,一定存在边 $xy \in E(P_1)$, 但 $xy \notin E(P_2)$. 显然 $P_1 \cup P_2 - xy$ 是连通图,因此 $P_1 \cup P_2 - xy$ 中存在连接 x 和 y 的路 P_{xy}, P_{xy} 也是 $T - xy$ 中的路, 从而 $P_{xy} + xy$ 是 T 中的圈,这与 T 是树矛盾. □

定理 3.4 的逆不一定成立,只需看图 3.3 就能明白.其原因在于图 3.3 中有环, 如果限于考虑无环图, 定理 3.4 的逆真(习题 3.1.6).



图 3.3

把定理 3.4 与定理 3.1 的(5)结合起来可得:树 T 不含圈,但添加任何一条边后得到的图含唯一的圈. 事实上, 由定理 3.1 中的(5),在 T 上添加边 xy 而得到的图 $T + xy$ 中含圈 C. xy 一定是 C 中的一条边,故 $C - xy$ 是 T 中连接顶点 x 和 y 的路, 但是由定理 3.4 这样的路唯一,因此 C 唯一.

习　题

3.1.1 证明互不同构的 7 阶树共 11 个,画出它们的图形.

3.1.2 如果分子式为 C_nH_m 的碳氢化合物对应的图是树,证明 $m = 2n + 2$,即该碳氢化合物为烷族碳氢化合物.

3.1.3 问分子式分别为 C_5H_{12}和 C_6H_{14} 但结构不同的碳氢化合物可能有多少种? [提示:从相应的图中去掉悬挂点(与氢原子对应),得到的是树,且其中每个顶点的度不超过 4.]

3.1.4 证明与醇 $C_nH_{2n+1}OH$ 对应的图是树.

3.1.5 问哪些树是完全二部图?

3.1.6 证明若图 G 无环, 且任意两个顶点之间有唯一的路相连, 则 G 是树.

3.1.7　证明图 G 是树的充分必要条件为：当 $n=1,2$ 时，$G=k_n$；$n\geq 3$ 时，$G\neq k_n$ 且添加一条边出现唯一的新圈。

3.1.8　考虑非平凡树中的最长路，由此证明推论 3.2。

3.1.9　用证明引理 2.6 的方法来证明推论 3.3。

3.1.10　证明恰好有两个顶点的度为 1 的树一定是路。

3.1.11　设 G 是林，且恰好有 $2k$ 个度为奇数的顶点。证明 G 中有互无公共边的路 $P_1, P_2, \cdots, P_k$，使得 $E(G)=E(P_1)\cup E(P_2)\cup\cdots\cup E(P_k)$。

3.1.12　如果 T 是树且 $\Delta(T)\geq k$，证明 G 中至少有 k 个度为 1 的顶点。

3.1.13　证明图 G 是林的充分必要条件为 G 的每一条边是割边。

3.1.14　设 T 是阶为 $k+1$ 的树，G 是满足 $\delta\geq k$ 的任一简单图，证明 G 中一定有一子图与 T 同构。

3.1.15　证明正整数序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_\nu)$ 是某个树的度序列的充分必要条件为 $\sum_{i=1}^{\nu} d_i=2(\nu-1)$（提示：由习题 1.1.6，存在图 G 其度序列满足 $\sum_{i=1}^{\nu} d_i=2(\nu-1)$，因此 $\varepsilon(G)=\nu-1$。考虑连通分支数目最少的 G。如果 G 不连通，其中一定有圈。设 $e=uv$ 是 G 中的圈上的一条边，又 $e_1=u_1v_1$ 是与 e 不在同一个连通分支内的边，$G_1=G-\{uv, u_1v_1\}+\{uu_1, vv_1\}$ 与 G 的度序列相同，但连通分支数比 G 少 1，矛盾。再由定理 3.1 可知 G 是树）。

3.1.16　如果顶点 x 满足 $\max_{y\in V}\{d(x,y)\}=\mathrm{rad}(G)$（参阅习题 2.1.18），则称 x 为图 G 的中心。证明树要么只有一个中心，要么恰好有两个中心且彼此相邻。（提示：设 T 是阶 $\nu\geq 3$ 的树，T_1 是去掉 T 中的悬挂点之后而得到的树，证明 T 和 T_1 有相同的中心。）

3.1.17　证明非平凡连通图 G 是关于顶点 v 的随机欧拉图的充分必要条件为 G 是欧拉图且 $G-v$ 是林。（参阅习题 2.2.6。）

3.2　割点和块

如果图 G 的边集 E 可以分划为两个非空子集 E_1 和 E_2，使得 $G[E_1]$ 和 $G[E_2]$ 有唯一的公共顶点 v，则称 v 为图 G 的**割点**，

图 3.4(a)中的顶点 v 和图 3.4 (b)中的顶点 v_1、v_2、v_3、v_4、v_5 都是割点。

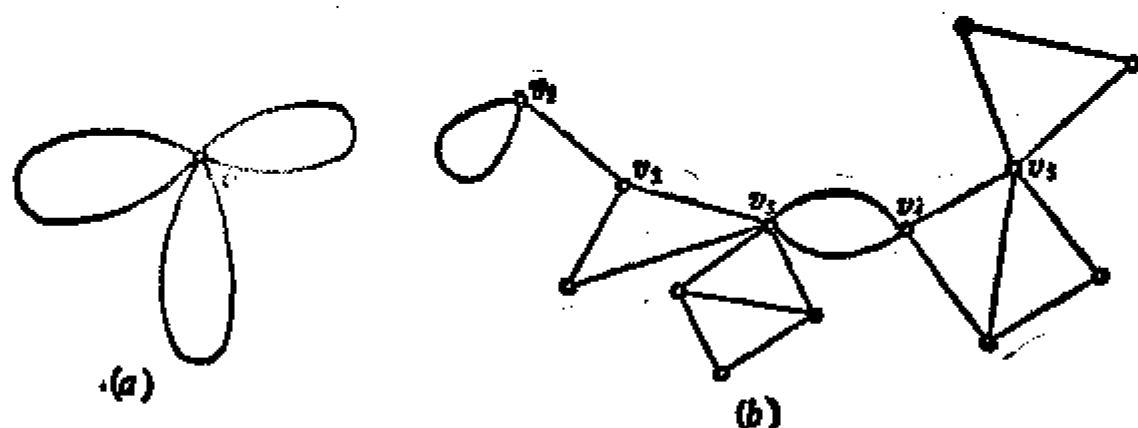


图 3.4

引理 3.5 如果顶点 v 满足 $\omega(G-v)>\omega(G)$，则 v 是图 G 的割点.反之，如果 v 是 G 的割点且顶点 v 上无环，则成立 $\omega(G-v)>\omega(G)$。

证 设 v 是 G 的连通分支 H 中的一个顶点. 把 $H-v$ 的连通分支记为 H_1、H_2、…、H_k ($k\geqslant 2$).令 $E_1=E(H_1)\cup\{vu|vu\in E(H),u\in V(H_1)\}$，$E_2=E(G)\setminus E_1$.显然$E_1$ 和 E_2 是 $E(G)$的分划，且 v 是 $G[E_1]$和 $G[E_2]$ 的唯一的公共顶点，从而 v 是图 G 的割点.

如果 v 是 G 的割点且 v 上无环. 设 v 是 $G[E_1]$和 $G[E_2]$的唯一的公共顶点，这里 E_1和 E_2 是$E(G)$的分划. 因E_1和E_2 非空且 v 上无环，存在连杆 $vu_1\in E_1$、$vu_2\in E_2$。设 P 是 G 中连接 u_1和 u_2的任一道路，路 P 上的边要么属于 E_1，要么属于 E_2，且 P 中与 u_1 关联的边必属于 E_1，与 u_2 关联的边必属于 E_2，由此不难看出 v 一定是路 P 上的一个顶点. 因此，$G-v$ 中 u_1与 u_2 属于不同的连通分支，即 $\omega(G-v)>\omega(G)$。□

需注意，如果 v 是 G 的割点但 v 上有环，$\omega(G-v)>\omega(G)$不一定成立。图 3.4(b) 中的 v_1 就是这样的顶点。

定理 3.6 树 T 的顶点 v 是割点的充要条件是 $d(v)>1$.

证 如果 $d(v)=0$,则 $T=K_1$, 显然 v 不是割点.

如果 $d(v)=1$,则 $\varepsilon(T-v)=\varepsilon(T)-1=\nu(T)-1-1=\nu(T-v)-1$,又因 $T-v$ 不含圈,由定理 3.1 中的(2)可知 $T-v$ 是树,故 $\omega(T-v)=1=\omega(T)$. 因 T 无环, 由引理 3.5 知 v 不是 T 的割点.

如果 $d(v)>1$,取顶点 v 的两个不同的邻点 w 和 u. wvu 是树 T 中连接顶点 w 和 u 的唯一的路,因此 $T-v$ 中 w 和 u 属于不同的连通分支,故 $\omega(T-v)>\omega(T)$,由引理 3.5 知 v 是 T 的割点.□

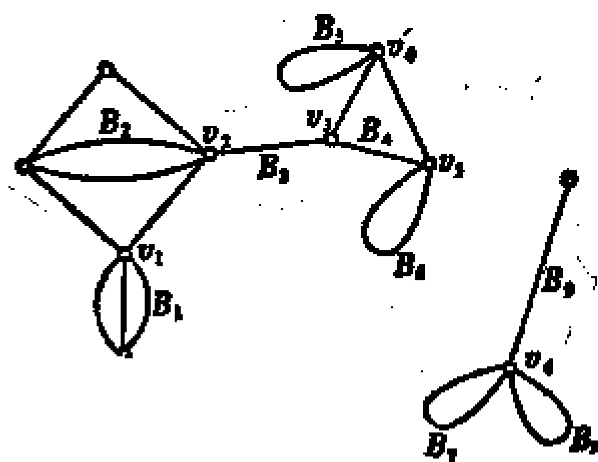
由推论 3.3 立即得到

推论 3.7 非平凡树 T 至少有两个顶点不是割点.

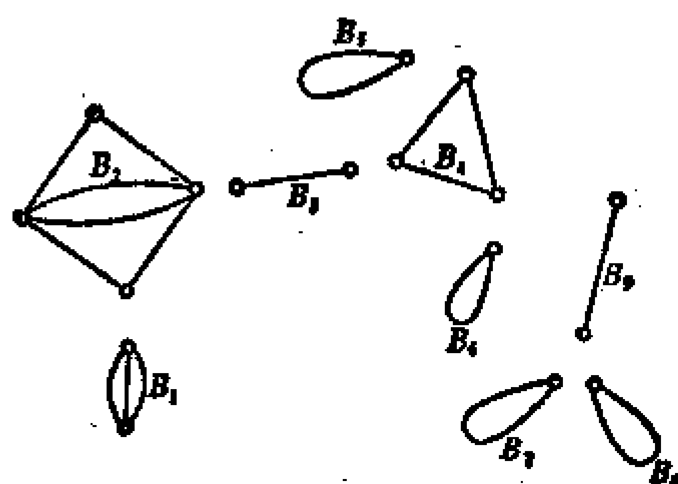
没有割点的连通图称为块. 只含一个顶点 v 的块只能是单点图 v 或顶点 v 上的一个环. 只含两个顶点 u 和 v 的块由以顶点 u 和 v 为端点的一条或多条边构成. 如果块中至少含三个顶点, 因块不含割点, 由引理 3.5, 其中不存在顶点 v 满足 $\omega(G-v)>\omega(G)$, 即不存在由一个顶点构成的顶点割, 因此这样的块必是 2 连通图.

图 G 的块是指 G 的这样的子图 B, B 是块且是包含于 G 中的极大块,即 G 的任何以 B 为真子图的子图都不是块. 任何一个图 G 都是它的块的并. G 的任何两个块最多只有一个公共顶点(习题 3.2.2).不难看出,图 G 的不同的块的公共顶点的集合也就是 G 的全部割点的集合(习题 3.2.3). 如果图 G 的割点用小实心圆表示,块用小空心圆表示, 当两个块有公共顶点时, 就把代表这两个块的小空心圆与代表它们的公共顶点的实心圆分别用边相连,这样得到的图称为图 G 的块-割点图. 不难证明,块-割点图是林,当 G 连通时是树(习题 3.2.4). 图 3.5(a)中画的是图 G, (b)中画的是 G 的块,(c)中画的是 G 的块-割点图.

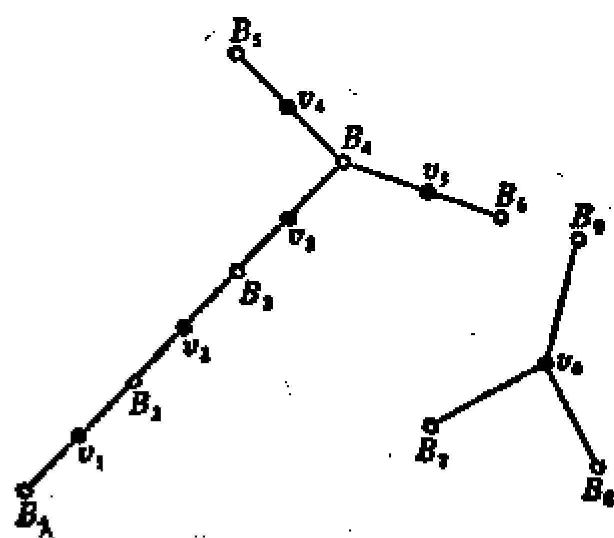
如果连通图 G 自身不是块, 它必然由两个或两个以上的块组



(a) 图 G



(b) G 的块



(c) G 的块－割点图

图 3.5

成．这时 G 的块-割点图是非平凡树，由推论 3.3，其中至少有两个悬挂点．显然，块-割点图中的悬挂点对应于 G 中只含唯一的割点的块．图 G 中只含唯一的割点的块又称为端块．因此，如果连通图 G 自身不是块，则 G 至少包含两个端块，图 3.5(a)中的 B_1、B_3、B_5 等都是端块．

习　题

3.2.1　设 G 是阶 $\nu \geq 3$ 的连通图，证明：

(a) 如果 G 有割边，则 G 中有顶点 v 满足 $\omega(G-v) > \omega(G)$；

(b) 举例说明反过来的结果不一定成立．

3.2.2　证明图 G 中的两个块最多有一个公共顶点．

3.2.3　证明顶点 v 是图 G 的割点的充分必要条件为 v 至少属于 G 中两个不同的块．

3.2.4　证明图 G 的块-割点图中无圈，又当 G 连通时，块-割点图也连通．

3.2.5　证明如果图 G 无偶圈且无孤立点，则 G 的每一个块要么是 K_2，要么是奇圈(提示：设 B 是 G 中顶点数 ≥ 3 的块且 C 是 B 中的奇圈，证明 C 无弦，即 C 中任何两个不相邻的顶点没有边相连，且 $V(B)\backslash V(C)=\varnothing$)．

3.2.6　证明 G 的块的数目等于 $\omega+\sum\limits_{v\in V}(b(v)-1)$，这里 $b(v)$ 表示 G 中含 v 的块的数目．(提示：考虑块-割点图．块-割点图的边数＝块数＋割点数 $-\omega$．又块-割点图的边数 $=\sum\limits_{v\in V'} b(v)$，其中 V' 为 G 的割点的集合．)

3.3　支撑树与补图

如果图 G 的支撑子图 T 是树，则称 T 是 G 的支撑树．显然，如果图 G 有支撑树，G 一定连通．反之，任何连通图 G 一定有支撑树．事实上，取 T 为 G 的极小连通支撑子图，由定理 3.1 中的 (4)

知T一定是G的支撑树．由此可以得到求图G的支撑树的方法如下．如果G中有圈，除去圈上的任一条边后得到的图G_1是G的连通支撑子图．如果G_1中还有圈，除去圈上的任一条边后得到的图G_2仍然是G的连通支撑子图．把这个过程一直进行到不能进行为止．最后得到的图T是G的连通支撑子图，且其中不含圈，从而T是树，它就是G的支撑树．可以把上面构造支撑树的方法称为**破圈法**．

由定理 3.1 中的(5)可知，G的支撑树T是G的极大无圈支撑子图，因此也可用下面的方法来构造连通图G的支撑树．在$V(G)$上逐个添加$E(G)$中的边，要求每次添加边之后得到的图都不含圈，把上述过程进行到无法再进行下去时得到的图T是G的极大无圈支撑子图，由定理 3.1 (5)可知T是G的支撑树．可以把上面构造支撑树T的方法称为**避圈法**．

图 3.6 中画出的是图G和它的三个支撑树．

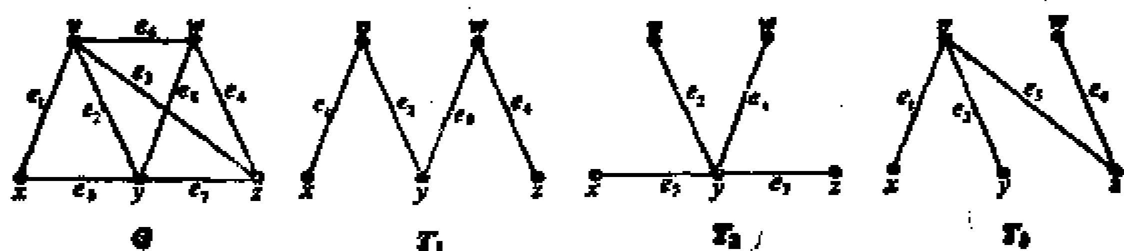


图 3.6

利用支撑树的概念可以推广推论 3.7 中的结果．

定理 3.8 非平凡的简单连通图G中至少有两个顶点不是割点．

证 设T是G的支撑树，由推论 3.7，T至少有两个顶点不是割点．设v就是这样的顶点，则$\omega(T-v)=1$．由于$T-v$是$G-v$的支撑子图，故$\omega(G-v)\leqslant\omega(T-v)$，因此$\omega(G-v)=1=\omega(G)$，由于$G$是简单图，由引理 3.5 可知$v$不是$G$的割点．□

一般说来，如果关于图G的每一个连通分支都选定一个支撑树，这些支撑树的全体构成G的一个支撑子图F，称为G的一个支撑林．显然，G的任何一个支撑林F的边数为$\nu-\omega$．图G不在支撑林F中的边的数目为$\gamma(G)=\varepsilon-\nu+\omega$，由3.1节最后一小段中的说明，把这些边中的任何一条添加到F上将得到唯一的一个圈，这样得到的$\varepsilon-\nu+\omega$个不同的圈称为与G的支撑林F相伴随的基本圈，而数$\gamma(G)=\varepsilon-\nu+\omega$称为图$G$的基圈数，它表示与$G$的任何一个支撑林相伴随的基本圈的个数.

回忆2.1中已给出过的某些定义.$[S,S']$表示图G中一端属于S，一端属于S'的全部边所构成的边集，这里S和S'是V的非空子集．非空边集$E'=[S,\bar{S}]$称为G的边割，S是V的非空真子集，$\bar{S}=V\backslash S$．极小边割是指这样的边割，它的任一真子集不再是边割；极小边割称为G的补圈．考虑图3.7中的图G，如果取$S=\{v_1,v_2,v_3\}$，则$[S,\bar{S}]=\{v_1u_1,v_3u_2,v_3w_2,v_2w_1\}$是$G$的边割，但不是$G$的补圈．如果取$S=\{v_1,v_2,v_3,u_1,u_2\}$，这时$[S,\bar{S}]=\{v_3w_2,v_2w_1\}$是$G$的补圈．又若$S=\{v_1,v_2,v_3,w_1,w_2\}$，$[S,\bar{S}]=\{v_1u_1,v_3u_2\}$也是$G$的补圈.

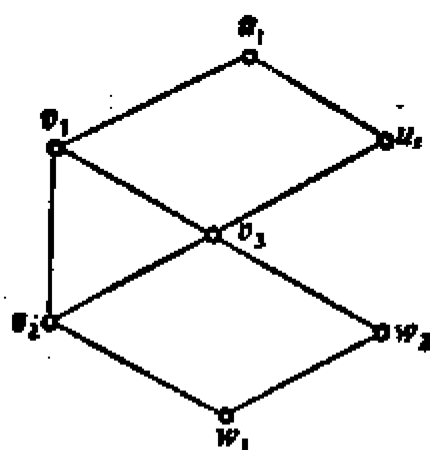


图 3.7

下面的定理刻画了补圈的特性.

定理 3.9　$[S,\bar{S}]$是G的补圈的充要条件为$[S,\bar{S}]=[X,Y]$．这里X和Y是V的非空真子集，$X\cap Y=\varnothing$，$X\cup Y$是G的某一连通分支的全部顶点，又导出子图$G[X]$、$G[Y]$都是G的连通子图.

证　充分性　因$X\cup Y$是某一连通分支的全部顶点，又$X\cap Y=\varnothing$，显然有$[X,Y]=[X,\bar{X}]$，并且$[X,Y]$非空，从而$[X,Y]$确实是图G的边割，按定义任何边割都不空，因此从G中除去任一边

割中的全部边之后，剩下的图的连通分支的数目一定比 G 的连通分支的数目大. 由于 $G[X]$ 和 $G[Y]$ 都是连通图，故从 G 中除去 $[X,Y]$ 的任何一个真子集后得到的图的连通分支数与 G 的连通分支数相同，因此 $[X,Y]$ 的任何真子集不可能是 G 的边割，故 $[X,Y]=[X,\overline{X}]$ 是极小边割，即它是 G 的补圈.

必要性　设 $[S,\overline{S}]$ 是 G 的补圈，又 G 的连通分支为 G_1、G_2、$\cdots G_\omega$. 如果 $[S,\overline{S}]\cap E(G_i)\neq\varnothing$，$[S,\overline{S}]\cap E(G_j)\neq\varnothing(i\neq j)$. 令 $S\cap V(G_i)=X$，则边割 $[X,\overline{X}]$ 非空且是 $[S,\overline{S}]$ 的真子集，这与 $[S,\overline{S}]$ 的极小性矛盾. 又由于 $[S,\overline{S}]\neq\varnothing$，存在某 $i(1\leqslant i\leqslant\omega)$，使得 $[S,\overline{S}]\cap E(G_i)\neq\varnothing$，但是 $[S,\overline{S}]\cap E(G_j)=\varnothing(j\neq i)$. 令 $S\cap V(G_i)=X$，$\overline{S}\cap V(G_i)=Y$，显然有 $[S,\overline{S}]=[X,Y]$，容易看出 $X\neq\varnothing$，$Y\neq\varnothing$，$X\cap Y=\varnothing$，$X\cup Y=V(G_i)$，还需要说明的是 $G[X]$、$G[Y]$ 都连通. 事实上，如果其中之一，例如 $G[X]$ 不连通，设 H 是 $G[X]$ 的一个连通分支，则 $[V(H),\overline{V(H)}]$ 非空且是 $[X,Y]$ 的真子集，这与 $[S,\overline{S}]=[X,Y]$ 是极小边割的前提矛盾. □

定理 3.9 告诉我们：把图 G 的一个连通分支的顶点集分划为两个非空子集，又若这两个子集的导出子图都连通，则连接这两个导出子图的全部边就是 G 的补圈，且 G 的任何一个补圈都具有这样的结构.

边割和补圈之间的关系由下面的定理刻划.

定理 3.10　边割是互无公共边的补圈的并集.

证　设 $[S,\overline{S}]$ 是图 G 的边割.

首先考虑 G 是连通图的情形. 如果 $G[S]$ 和 $G[\overline{S}]$ 都连通，由定理 3.9，$[S,\overline{S}]$ 是补圈. 如果 $G[S]$ 和 $G[\overline{S}]$ 不都连通，不失一般性，设 $G[S]$ 不连通，把 $G[S]$ 的连通分支记为 $G[H_i](i=1,2,\cdots,m)$，这里 $\bigcup_{i=1}^{m}H_i=S$，$H_i\neq\varnothing$，$H_i\cap H_j=\varnothing(i\neq j)$. 设 $G-H_i$ 的连

通分支为$G_{ij}(1\leqslant j\leqslant n_i)$。因$G$连通，有边连接$V(G_{ij})$与$H_i(1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n_i)$，因此$G[\overline{V(G_{ij})}]$是连通图。由定理 3.9，$[V(G_{ij}), \overline{V(G_{ij})}]$是补圈。有等式

$$[S,\bar{S}]=\sum_{i=1}^{m}[H_i, \bar{H}_i]=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}[V(G_{ij}),\overline{V(G_{ij})}]$$

显然，只要$(i, j)\neq(i',j')$，$[V(G_{ij}), \overline{V(G_{ij})}]$与$[V(G_{i'j'}), \overline{V(G_{i'j'})}]$没有公共边，这就证明了当$G$连通时，边割$[S,\bar{S}]$是互不相交的补圈的并。

如果G不连通，只需分别考虑$[S,\bar{S}]$属于G的同一个连通分支的那一部分，由前述关于G连通时的结果可知这时$[S,\bar{S}]$同样能够表为互不相交的补圈的并。□

为什么极小边割称为补圈呢？这是因为它和圈之间存在下面要叙述的对偶关系。前边已谈到过图G的支撑林以及和它相伴随的基本圈，为使对偶关系看起来更清楚明瞭，把支撑林和基本圈的关系叙述为定理的形式。

定理 3.11 设F是图G的支撑林，又e是图G的不在F中的边，则

(1) F不含圈；

(2) $F+e$含唯一的圈。

证 因F的各个连通分支是G的各个连通分支的支撑树，故从定理 3.1 (5) 和定理 3.4 立即得到本定理的结论。□

设H是G的子图，H在G中的**补图**是指G的支撑子图$G-E(H)$，记为$\bar{H}(G)$，简记为$\bar{H}$。设F是G的支撑林，则$\bar{F}$称为G的**补林**。如果G连通，T是G的支撑树，则称$\bar{T}$是G的**补树**。

补林和补圈之间的关系完全类似于定理 3.11 中支撑林和圈之间的关系。把定理 3.11 中的支撑林换为补林，圈换为补圈，就得到下面的定理 3.12，它显示了上面提到过的对偶关系。

定理 3.12 设$\bar{F}$是图G的补林，又e是图G的不在$\bar{F}$中的边，

则

(1) $\overline{F}$ 不含补圈；

(2) $\overline{F}+e$ 含唯一的补圈.

证 设$B=[S,\overline{S}]$是G的补圈，又B含在$\overline{F}$中.因$G-B$包含G的支撑林F，从而$\omega(G-B)=\omega(G)$，但是在定理 3.9 的充分性的证明中已说明必须有$\omega(G-B)>\omega(G)$，矛盾.

现在证明(2). 因$e\notin E(\overline{F})$，故e是F中的边，设e是支撑林F的连通分支T中的一条边. $T-e$由两个树组成，把它们记为T_1、T_2. 由定理 3.9 可知$B=[V(T_1),V(T_2)]$是G的补圈，它显然包含在$\overline{F}+e$之中. 任给$b\in[V(T_1),V(T_2)]$，$F-e+b$是G的支撑林，因此包含在$\overline{F}+e$中的任何一个补圈B'必须包含b；否则$G-B'$包含支撑林$F-e+b$，从而$\omega(G-B')=\omega(G)$，前已说明这是不可能的. 因此$B\subseteq B'$，由补圈的极小性可知$B'=B$，故B是$\overline{F}+e$中唯一的补圈. □

证明了定理 3.8 之后，我们曾给出与图G的支撑林F相伴随的基本圈以及基圈数$\gamma(G)$的定义. 由定理 3.12，补林$\overline{F}$中不含补圈，对于任何$e\in E(F)$，$\overline{F}+e$中含唯一的补圈，当e取遍F中的边，一共得到$\nu-\omega$个不同的补圈，称为与支撑林F相伴随的**基本补圈**. $\xi(G)=\nu-\omega$称为G的**基补圈数**.

定理 3.11 和 3.12 是对一般的图G叙述的. 如果G连通，则只需用G的支撑树T代替定理中的支撑林F，用补树$\overline{T}$代替补林$\overline{F}$，就得到关于连通图G的相应的结果.

习 题

3.3.1 证明：

(a) 在图G的每一个支撑林中出现的边一定是割边；

(b) 在G的任何支撑林中都不出现的边一定是环.

3.3.2 证明：

(a) ν 阶连通图G的边数 $\varepsilon \geqslant \nu-1$；

(b) 连通分支数为 ω 的 ν 阶图的边数 $\varepsilon \geqslant \nu-\omega$，当且仅当$G$是林时才有 $\varepsilon=\nu-\omega$。

3.3.3 证明如果G是无环连通图并且只有唯一的 支撑 树T， 则$G=T$。

3.3.4 设F是包含于G中的极大林．证明：

(a) 对于G的每一个连通分支H，$F\cap H$是H的支撑树；

(b) $\varepsilon(F)=\nu(G)-\omega(G)$。

3.3.5 证明图G至少有 $\gamma(G)=\varepsilon-\nu+\omega$ 个不同的圈．

3.3.6 证明恰好有两个顶点不是割点的简单连通图是路．

3.3.7 在K_5、$K_{3,3}$、W_5、C_5、彼得森图中各求一个支撑树，并找出与这个支撑树相伴随的一切基本圈和基本补圈．

3.3.8 分别算出 K_n、$K_{r,s}$、E_n、W_n、彼得森图、n 阶 r 正则连通图、k 方体Q_k 的基圈数 $\gamma(G)$和基补圈数 $\xi(G)$。

3.3.9 设E'是图G的某些边的集合，证明E'中含补圈的充分必要条件是

$$\omega(G-E')>\omega(G).$$

3.3.10 设E'是图G中某些边的集合，证明E'中含补圈的充分必要条件是G的每一个支撑林与E'的交非空．

3.3.11 设E'是图G中某些边的集合，证明E'中含圈的充分必要条件是G的每一个补林与E'的交非空．

3.3.12 设H与K是图G的子图，证明基补圈数满足：

(a) $0\leqslant\xi(H)\leqslant\varepsilon(H)$；

(b) 如果$H\subseteq K$，$\xi(H)\leqslant\xi(K)$；

(c) $\xi(H\cup K)+\xi(H\cap K)\leqslant\xi(H)+\xi(K)$(提示：考虑$H\cap K$的支撑林$F$，把$F$分别扩充为$H$的支撑林$F_1$和$K$的支撑林$F_2$)。

3.3.13 设S是n元素集，$\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$是$S$的$n$个不同的子集的集合．定义以$\mathscr{A}$为顶点集的图$G$如下：如果有$x\in S$使得$A_i\triangle A_j=\{x\}$ ($A_i\triangle A_j=(A_i\cup A_j)\setminus(A_i\cap A_j)=(A_i\setminus A_j)\cup(A_j\setminus A_i)$称为 A_i 与 A_j 的 对称差)，则在 A_i 与 A_j 之间连一条边，并且把边 A_iA_j 用 x 来标记．对于$H\subseteq G$以 Lab(H) 表示在H的边上出现的不同标记 的集合．证明若标记x在图G

的圈上出现，它必然出现偶数次，从而对于图G的每一个支撑林F，$\text{Lab}(F)=\text{Lab}(G)$。

3.3.14 利用题3.3.13的结果证明：集S中有元素x，使得集合$A_1-\{x\}$，$A_2-\{x\}$，$\cdots$，$A_n-\{x\}$中的任何两个都不相同．对任何n举例说明，如果$|\mathscr{A}|=n+1$，本题中的结论一般不成立。

3.3.15 设C_1与C_2是图G中的圈，B_1与B_2是G中的补圈（把它们都看成边的集合），证明：

(a) $C_1\triangle C_2$是互不相交的圈的并（提示：$C_1\triangle C_2$的边导出子图的每一个顶点的度为偶数）；

(b) $B_1\triangle B_2$是互不相交的补圈的并（提示：设$B_1=[S_1,\bar{S}_1]$，$B_2=[S_2,\bar{S}_2]$，则$B_1\triangle B_2=[S_1\triangle S_2,\overline{S_1\triangle S_2}]$）；

(c) 对G中的任一条边e，$C_1\cup C_2\backslash\{e\}$中含圈；

(d) 对G中的任一条边e，$B_1\cup B_2\backslash\{e\}$中含补圈。

3.3.16 考虑图G的边集$E(G)$的一切子集的集合$2^{E(G)}$．对于A，$B\in 2^{E(G)}$，定义$A\oplus B=A\triangle B$（A与B的对称差）．用1和0表示模2整域中的元素（$0+1=1+0=1$，$0+0=1+1=0$，$0\cdot1=1\cdot0=0\cdot0=0$，$1\cdot1=1$），定义$1\cdot A=A$，$0\cdot A=\varnothing$．证明$2^{E(G)}$在上述加法和数量乘法下是向量空间，且$G$的全体边是这个向量空间的一组基，因而其维数为$e(G)$．称它为与图$G$相伴随的向量空间．以图1.7中的图为实例具体说明以上的概念。

3.3.17 设U是与图G相伴随的向量空间（习题3.3.16）．证明图G没有公共边的圈的一切可能的并的集合构成U的子空间$\mathscr{C}$（称为U的圈空间），图G的互无公共边的补圈的一切可能的并的集合也是U的子空间，记为$\mathscr{B}$（称为G的补圈空间）．证明与G的任一支撑林相伴随的全部基本圈是$\mathscr{C}$的一个基，全部基本补圈是$\mathscr{B}$的一个基，因此$\mathscr{C}$的维数是基圈数$\gamma(G)=e-\nu+\omega$，$\mathscr{B}$的维数是基补圈数$\xi(G)=\nu-\omega$．（提示：用习题3.3.15来证明$\mathscr{C}$和$\mathscr{B}$的封闭性．设F是G的支撑林．如果G中的圈C上包含的补林$\bar{F}$中的边为$e_1,e_2,\cdots,e_m$，以$C_{e_1},C_{e_2},\cdots,C_{e_m}$分别表示包含$e_1,e_2,\cdots,e_m$的基本圈，则$C\triangle C_{e_1}\triangle C_{e_2}\triangle\cdots\triangle C_{e_m}=\varnothing$，即$C=C_{e_1}\oplus C_{e_2}\oplus\cdots\oplus C_{e_m}$．补圈与基本补圈之间有完全类似的结果。）

3.3.18 如果图G的边集$I\subseteq E(G)$中不含圈（把圈换为补圈本题的结果仍然成立），则称I为独立集．证明：

(*a*) 独立集的任何子集是独立集；

(*b*) 如果 I 与 J 都是独立集且 $|J|>|I|$，必存在 $e\in J\backslash I$，使得 $I\cup\{e\}$ 是独立集. (提示：关于圈的情形. I 的边导出子图是林(仍以 I 来表示)，如果 J 中每一条边的两端点都在 I 的同一个连通分支内，有 $|J|\leqslant|I|$，矛盾. 关于补圈的情形，$\omega(G-I)=\omega(G)$. 如果对于任何 $e\in J\backslash I$，$I\cup\{e\}$ 中含补圈，则 e 是 $G-I$ 的割边，因此 $\omega(G-I\cup J)=\omega(G)+|J\backslash I|$. 另一方面 $\omega(G-I\cup J)\leqslant\omega(G)+|I\backslash J|$. 从而 $|J\backslash I|\leqslant|I\backslash J|$，与 $|J|>|I|$ 矛盾.)

3.3.19 设 $d\geqslant1$，求出

$$\max_{\mathrm{diam}(G)=d}\ \min\{\mathrm{diam}\,T:T\text{ 是 }G\text{ 的支撑树}\}$$

的值(提示：设 G 是直径为 d 的图又 v_0 是 G 的顶点，考虑 G 的支撑树 T，使得树 T 中从 v_0 到任一顶点 v 的路是图 G 中从 v_0 到 v 的最短路，因此

$$\min\{\mathrm{diam}\,T:T\text{ 是 }G\text{ 的支撑树}\}\leqslant 2d)$$

3.3.20 设图 G 连通且 $T_1,T_2,\cdots,T_t$ 是 G 的全部支撑树. 构造图 $\tilde{G}$ 如下：$\tilde{G}$ 的顶点是 $T_1,T_2,\cdots,T_t$，如果 $E(T_i)\triangle E(T_j)$ 恰由 G 中的两条边组成，则在 T_i 和 T_j 之间连边. 简单图 $\tilde{G}$ 称为 G 的**树图**. 证明 $\tilde{G}$ 连通.

3.4 凯莱公式

设 $e=uv$ 是图 G 的连杆. 在 G 中除去边 e，把顶点 u 和 v 合并为一个新顶点，而 G 中除 e 之外一切和 u 相关联的边以及和 v 相关联的边都改成和新顶点相关联、并且图中其它的顶点和边以及其间的关联关系都保持不变，这样得到的新图称为在图 G 中**收缩边 e** 后得到的图，记为 **$G\cdot e$**.

以 $\tau(G)$ 表示图 G 的不同支撑树的个数，下面的递推公式成立.

定理 3.13 设 e 是图 G 的连杆，则

$$\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G\cdot e)$$

证 把 G 的支撑树分为两类，第一类不含 e，第二类含 e. 显然，第一类支撑树是 $G-e$ 的支撑树；反之，$G-e$ 的支撑树也是第

一类支撑树．因此第一类支撑树的数目为$\tau(G-e)$．

设T是第二类中的支撑树，收缩边e，得$T\cdot e$．不难看出，$T\cdot e$是$G\cdot e$的支撑树；反过来，在$G\cdot e$的支撑树中只要把由e的两个端点收缩而得的顶点用边e来代替即得G的支撑树(图 3.8)，因此第二类支撑树与$G\cdot e$的支撑树之间有一一对应关系，故第二类支撑树的数目为$\tau(G\cdot e)$．因此$\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G\cdot e)$成立．□

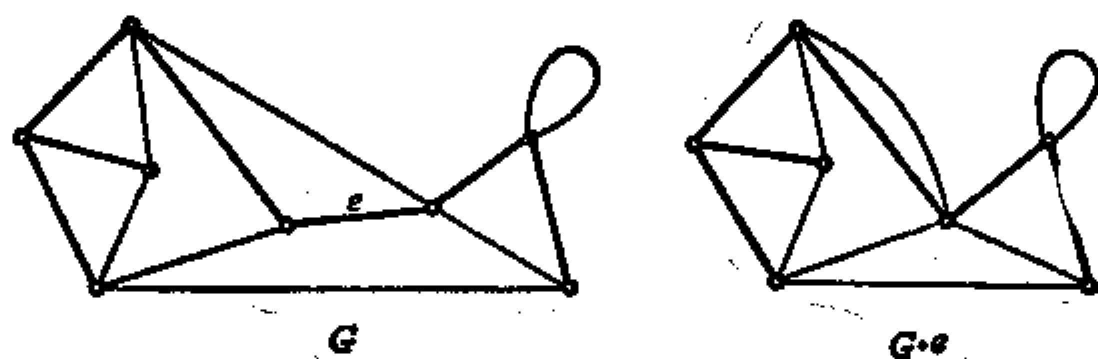


图 3.8

图 3.9 (见下页)说明怎样用定理 3.13 来递推计算$\tau(G)$；为了简洁，图的支撑树的个数就用图来表示．

需说明的是：$\tau(G)$表示G中不同支撑树的个数，并非G的不同构的支撑树的个数．设G中的边都给以标号，两个支撑树所用的边不全相同，就认为两个支撑树不相同．图 3.10 (见83页)中画出了图G和它的五个不同的支撑树，但是这五个支撑树都同构．

虽然定理 3.13 提供了计算支撑树数目的一个方法，但当图的顶点和边的数目都较大时，这种方法十分繁杂，不切实用．可以通过行列式来计算$\tau(G)$，第十章中将给出这个结果．当G是完全图时，英国数学家凯莱(A. Cayley，1821—1895) 在 1889 年得到了计算$\tau(K_n)$的简单公式，以下要叙述的证明是普鲁费尔(H. Prüfer)在 1918 年给出的．

定理 3.14 $\tau(K_n)=n^{n-2}$

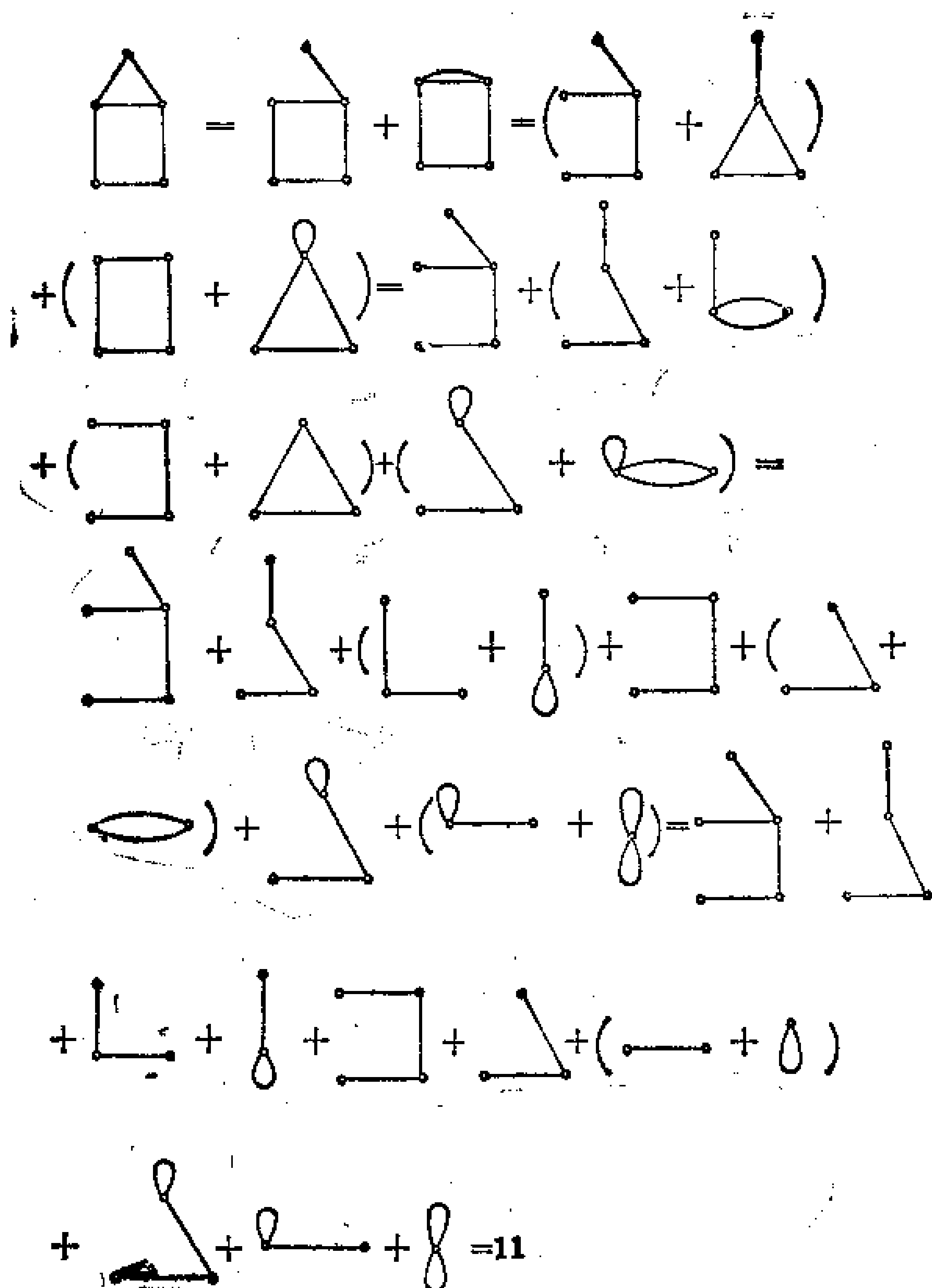


图 3.9

证　用1、2、…、n来标记K_n的顶点，记$N=\{1,2,\cdots,n\}$。当每一个$a_i(1\leqslant i\leqslant n-2)$都从1到$n$任意取值时，共有$n^{n-2}$个不



图 3.10

同的序列$(a_1,a_2,\cdots,a_{n-2})$.因此，如果能够建立K_n的支撑树的集合与上述序列的集合之间的一一对应关系，定理 3.14 就得到了证明.

设T是K_n的一个支撑树，考虑T的全体悬挂点，假定其中标号最小的顶点为b_1，设b_1的邻点为a_1. 从T中除去顶点b_1以及与它关联的边，假定由此得到的$n-1$个顶点的树的标号最小的悬挂点为b_2，设点b_2的邻点为a_2. 除去b_2以及与它关联的边后得到一个顶点数为$n-2$的树，设这个树的标号最小的悬挂点为b_3，其邻点为a_3. 依此下去直至剩下两个顶点为止. 这就得到了序列$(a_1,a_2,\cdots,a_{n-2})$. 例如设$n=7$，而树T如图 3.11，则$b_1=1$，$a_1=3$；$b_2=2$，$a_2=5$；$b_3=4$，$a_3=3$；$b_4=6$，$a_4=5$；$b_5=5$，$a_5=3$. 所得的序列为$(3,5,3,5,3)$.

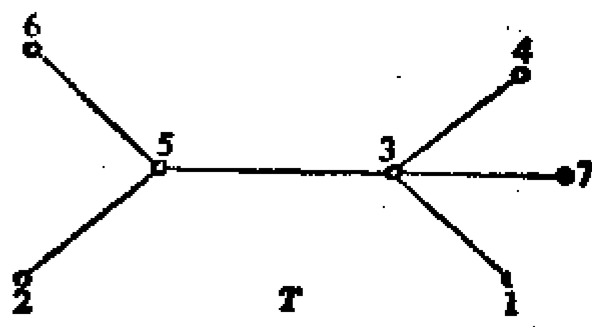


图 3.11

反过来，从序列$(a_1,a_2,\cdots,a_{n-2})$也可以求出和它对应的支撑树.首先容易看出，T中度为$d_T(v)$的顶点在$(a_1,a_2,\cdots,a_{n-2})$中共出现$d_T(v)-1$次. 因此，在序列$(a_1,a_2,\cdots,a_{n-2})$中不出现的各个数恰好是树T的悬挂点的标号. 可以按照下面的手续从

$(a_1,a_2,\cdots,a_{n-2})$造T.记b_1是不在$(a_1,a_2,\cdots,a_{n-2})$中出现的标号最小的顶点,在a_1与b_1之间连上一条边.设b_2是$N\backslash\{b_1\}$中不属于$\{a_2,\cdots,a_{n-2}\}$的标号最小的顶点,在a_2和b_2间连边. 这样进行下去直至连出$n-2$条边$b_1a_1,b_2a_2,\cdots,b_{n-2}a_{n-2}$. 最后用边连接$N\backslash\{b_1,b_2,\cdots,b_{n-2}\}$中的两个顶点就得到树$T$. 以序列(3,5,3,5,3)为例,依顺序连出边13,25,43,65,53, 37, 这样得到的正是图3.11中的树.

从K_n的任一支撑树T出发,可以造出与它对应的序列. 从这个序列按上面的规则反过来又可以造出与它对应的支撑树,显而易见这个支撑树正是原先的支撑树T. 因此以上建立的支撑树与序列间的对应关系是一一对应. 定理获证. □

习　题

3.4.1　证明阶为n的有标号的简单图的总数为$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. 问其中恰好有m条边的图的总数是多少?

3.4.2　通过考虑树中的最长路,直接验证有标号的5阶树的总数为125.

3.4.3　用定理3.13中的递推公式推算$K_{3,3}$的支撑树的个数.

3.4.4　对n阶图的顶点标号,证明给定的n阶简单图G恰有$n!/g$种不同的标号方式,这里$g=|\Gamma(G)|$是G的自同构群的阶数(参阅题1.2.12). 对K_3和$K_{1,3}$的情形进行验证.

3.4.5　画出K_4的16个支撑树.

3.4.6　用定理3.13中的递推公式证明

$$\tau(W_{n+1})=4\tau(W_n)-4\tau(W_{n-1})+\tau(W_{n-2})$$

这里W_n表示n个顶点的轮. 由此用母函数法证明

$$\tau(W_{n+1})=-2+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

3.4.7　从n个顶点有标号的树中任意选出一个树,问得到以给定的顶点v为悬挂点的树的概率是多少? 证明当n充分大时,这个概率的值接近

e^{-1}(提示：若树T以顶点v为悬挂点，$T-v$是$n-1$个顶点有标号的树，用凯莱公式)。

3.4.8 (a) 设图H的每一对相邻的顶点间都恰有k条边相连，又G是H的底图。证明

$$\tau(H)=k^{\nu-1}\tau(G)$$

(b) 把图G中的每一条边都用长为k的路代替(当边是环的情形用长为k的圈代替)，得到的图记为H。证明$\tau(H)=k^{\varepsilon-\nu+1}\tau(G)$。

(c) 利用(a)与(b)推证$\tau(K_{2,n})=n2^{n-1}$。

3.4.9 设e是K_n中的一条边，证明$\tau(K_n-e)=(n-2)n^{n-3}$。(提示：K_n中共有n^{n-2}个支撑树，每一个树有$n-1$条边，共有$(n-1)n^{n-2}$条边。根据对称性，在以上的计数中每条边总共算了

$$(n-1)n^{n-2}\Big/\frac{n(n-1)}{2}=2\,n^{n-3}\text{次。)}$$

3.4.10 以$T(n)$表示n个顶点的标号树的个数，证明

$$2(n-1)T(n)=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}k(n-k)T(k)T(n-k),$$

由此得恒等式

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}k^{k-1}(n-k)^{n-k-1}=2(n-1)n^{n-2}$$

(提示：在k个顶点的标号树与$n-k$个顶点的标号树间连一条边即得n个顶点的标号树.)

3.5 应用

最优树问题

假定要修建连接n个城市的公路网，已知连接城市v_i和v_j的公路的造价为C_{ij}，要求设计公路网使总造价最小。如果把城市看成顶点，公路看成边，显然总造价最小的公路网一定是以这n个城市为顶点的树。从图论的角度看，上述问题可以叙述为在权恒正的赋权完全图中求权最小的支撑树。

可以提出更一般的问题：给定赋权连通图 G，G 的每一条边都赋以实权 $w(e)$，要求找出 G 的支撑树 T，使得 T 的权

$w(T)=\sum_{e\in E(T)} w(e)$ 取最小值．这样的树 T 称为图 G 的最优树．

1956 年克拉斯科(J. B. Jr. Kruskal)给出了求解上述问题的好算法，这个算法通常称为克拉斯科算法，其步骤如下：

(1) 在图 G 的一切连杆中选连杆 e_1，使 $w(e_1)$ 最小；

(2) 边 $e_1,e_2,\cdots,e_k$ 选定后，从 $E\backslash\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$ 中选边 e_{k+1}，使满足以下的两个条件：

(i) $G[\{e_1,e_2,\cdots,e_{k+1}\}]$ 中不含圈，

(ii) 在满足(i)的前提下，使 $w(e_{k+1})$ 尽可能小；

(3) 当步骤(2)不能再进行时即停止．

首先说明由克拉斯科算法得到的图 T^* 是 G 的支撑树．因算法的每一步都不允许出现圈，故 T^* 中不含圈．当 $G[\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}]$ 不是 G 的支撑子图时，总可以在 $E\backslash\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$ 中选出连杆 e_{k+1}，使得 e_{k+1} 的端点至少有一个不是 $G[\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}]$ 的顶点，因此 $G[\{e_1,e_2,\cdots,e_{k+1}\}]$ 中无圈，且 $G[\{e_1,e_2,\cdots,e_{k+1}\}]$ 的顶点多于 $G[\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}]$ 的顶点．从而当 $G[\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}]$ 不是 G 的支撑子图时，克拉斯科算法还可以进行下去，因此最终得到的 T^* 是 G 的支撑子图．总起来可知 T^* 是 G 的极大无圈支撑子图，由定理3.1 的(5)可知 T^* 是 G 的支撑树．

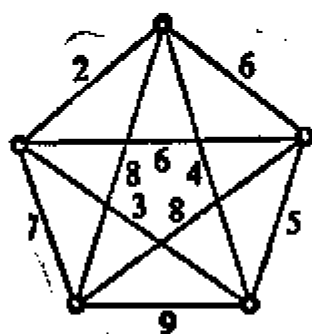


图 3.12

还需说明由克拉斯科算法求得的树 T^* 是 G 的最优树．在说明这一点之前，先看一个求最优树的具体例子．

求图 G (图3.12)的最优树，每条边旁标示的数字是它的权．图3.13从(b)到(e)的各个图中用粗边标示出来的图表示对 G 施行克

拉斯科算法时逐步得到的图，图 3.13(e)中用粗边标示的图就是经克拉斯科算法而得到的G的支撑树T^*.

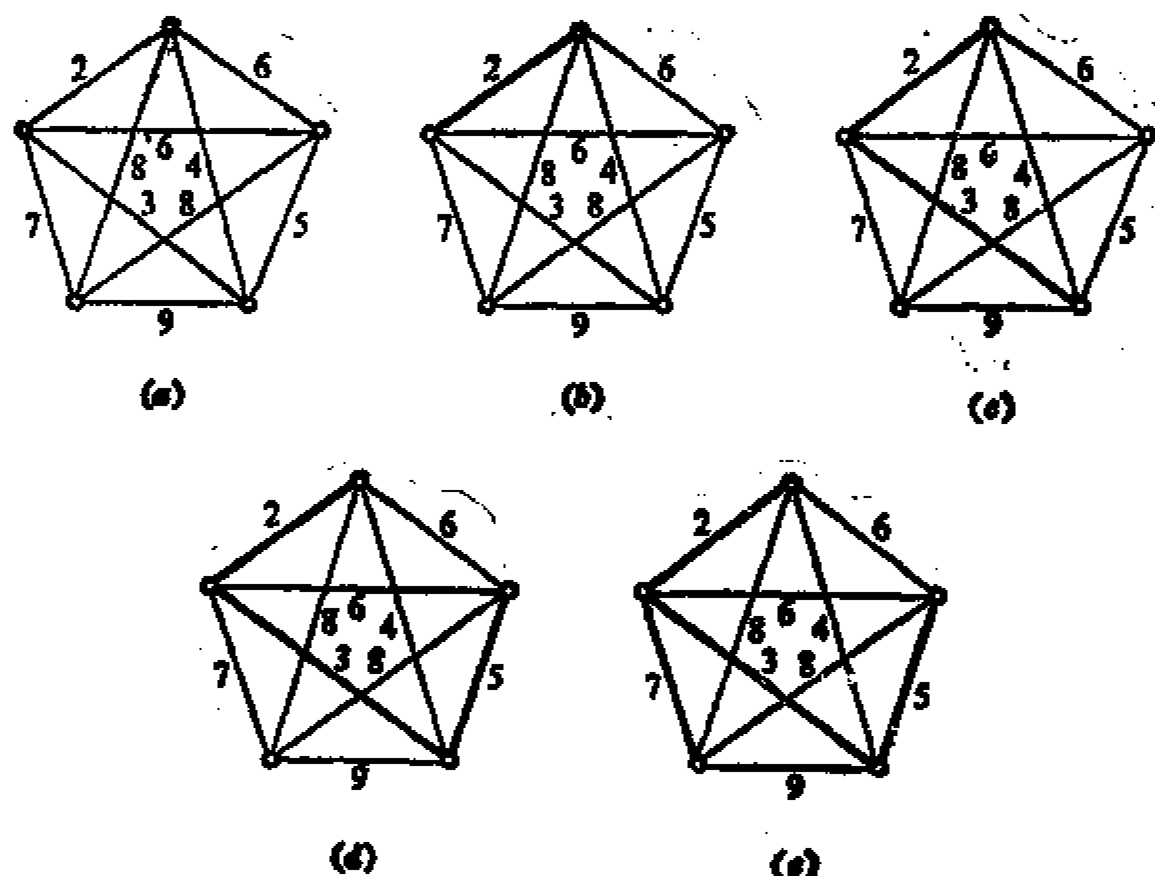


图 3.13

定理 3.15 由克拉斯科算法构造出的任何支撑树$T^*=G[\{e_1,e_2,\cdots,e_{\nu-1}\}]$是$G$的最优树.

证 前已说明T^*是G的支撑树. 如果T^*不是最优树，选取这样的最优树T，使得T与T^*的公共边数达到最大.

因T^*不是最优树，T^*的边不可能全是T的边，设T^*的边集$\{e_1,e_2,\cdots,e_{\nu-1}\}$中不属于$T$的下标最小的边为$e_k$. 由定理3.1(5)可知$T+e_k$中包含圈$C$. 因$T^*$是树，圈$C$不能完全包含在$T^*$中，因此$C$中一定有不属于$T^*$的边$e$，显然$e\in E(T)$. $T'=(T+e_k)-e$是G的支撑树. 因e_k是T^*中不属于T的下标最小的边，故$e_1,e_2,\cdots,e_{k-1}$既是T^*中的边也是T中的边. 因e不是T^*中

的边，故 $e\in E\setminus\{e_1,e_2,\cdots,e_{k-1}\}$. 又因 e 是 T 中的边，故 $e_1,e_2,\cdots,e_{k-1},e$ 都是 T 中的边，于是 $G[\{e_1,e_2,\cdots,e_{k-1},e\}]$ 中不含圈. 因此，当用克拉斯科算法构造 T^* 进行到第 k 步时，e 和 e_k 都属于 $E\setminus\{e_1,e_2,\cdots,e_{k-1}\}$，又 $G[\{e_1,e_2,\cdots,e_{k-1},e\}]$ 和 $G[\{e_1,e_2,\cdots,e_{k-1},e_k\}]$ 都不含圈，因此由克拉斯科算法(2)中的(ii)可知

$$w(e_k)\leqslant w(e)$$

从而

$$w(T')=w(T)+w(e_k)-w(e)\leqslant w(T)$$

故 T' 也是 G 的最优树. 但 T' 与 T^* 的公共边的数目比 T 与 T^* 的公共边的数目多 1，这和 T 的最初选择矛盾. □

与 3.3 节中构造支撑树的避圈法相对照，构造最优树的克拉斯科算法也是避圈法，但在避圈的同时还要求每一步所选择的边的权最小，即在进行每一步时都采取眼前最有利的选择. 这种只顾眼前的最佳选择，而不管整体的效果如何的算法有时称为**贪婪算法**，第七章讲图的点着色问题时将较多地谈到这种算法.

在 3.3 节中构造支撑树时除了避圈法外还有破圈法. 能否用类似于破圈法的方法构造最优树？答案是肯定的，这就是构造最优树 T^* 的下述算法：

(1) 选择 G 中的边 e_1，使 $w(e_1)$ 最大，且 $G_1=G-e_1$ 仍然连通；

(2) 当 $G_k=G-\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$ 已选定后，在 $E\setminus\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$ 中选边 e_{k+1}，使满足以下的两个条件：

(i) $G_{k+1}=G-\{e_1,e_2,\cdots,e_k,e_{k+1}\}$ 仍然连通，

(ii) 在满足(i)的前提下，使 $w(e_{k+1})$ 尽可能大；

(3) 当步骤(2)不能再进行即停止.

上述算法的思想是逐次删去图中权最大的非割边，即逐次删去一切位于圈上的边中的权最大的边. 这个算法也属于贪婪型算法. 图 3.14 中画出由上述算法逐次得到的 G_k，图 3.14 (g) 是得

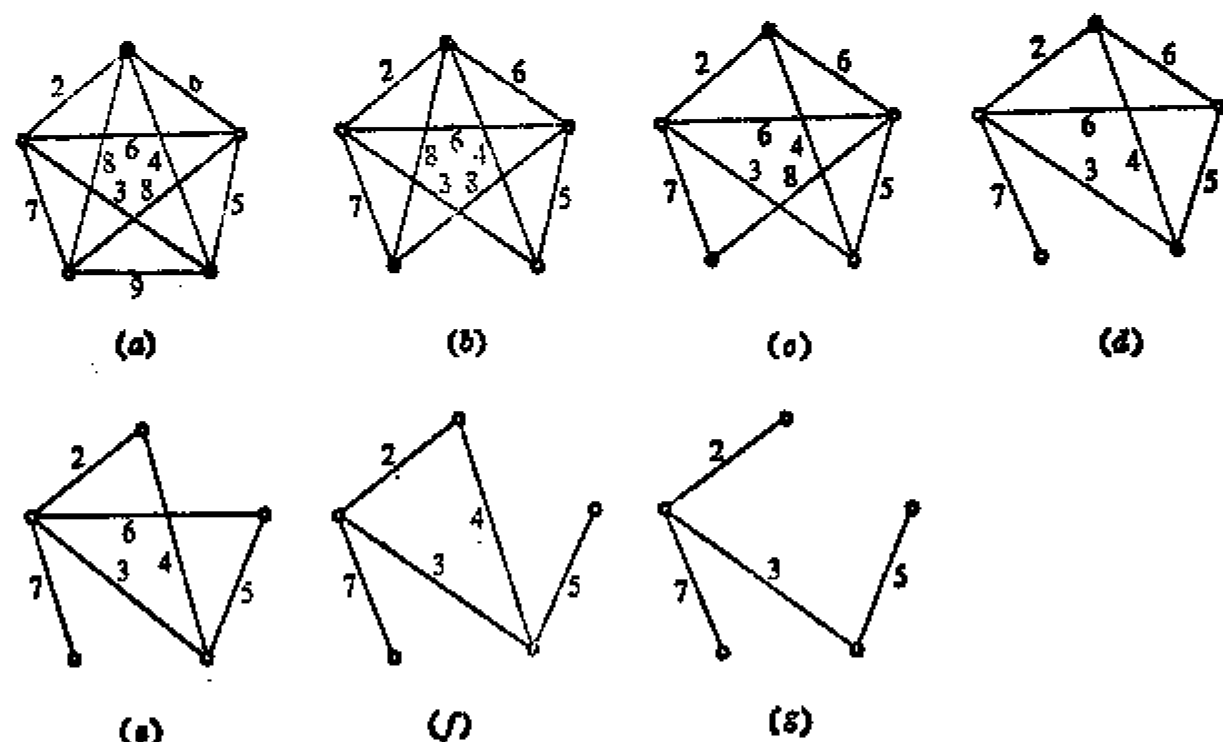


图 3.14

到的最优树。

除了上面两个算法外，还可以给出以下的算法：

(1) 任意选定图 G 中的顶点 x_1，在与 x_1 关联的连杆中，选 x_1x_2，使 $w(x_1x_2)$ 最小；

(2) 当顶点 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 已选定，又关于每个顶点 $x_j(1<j\leqslant k)$，还选定了连杆 $x_ix_j\ (i<j)$. 在一切形状为 $x_ix(1\leqslant i\leqslant k, x\notin\{x_1, x_2, \cdots, x_k\})$ 的连杆中选定 x_ix_{k+1}，使权 $w(x_ix_{k+1})$ 最小；

(3) 当步骤 2 不能进行时即停止.

这个算法同样是贪婪型算法. 用证明定理 3.15 的类似方法可以证明以上两个算法都给出 G 的最优树(习题3.5.1, 3.5.2).

旅行推销员问题的近似解.

2.4 节的最后一段曾介绍过旅行推销员问题. 这里将给出它的一个近似解法. 利用求最优树的克拉斯科算法，还能给出旅行推销员问题的解的下界的一个估计式.

旅行推销员问题相当于在赋权完全图 K_ν 中求权最小的汉密尔顿圈。从任一个汉密尔顿圈 $v_1v_2v_3\cdots v_\nu v_1$ 出发，如果

$$w(v_{i-1}v_{j-1})+w(v_iv_j)<w(v_{i-1}v_i)+w(v_{j-1}v_j)$$

则汉密尔顿圈 $v_1v_2\cdots v_{i-1}v_{j-1}v_{j-2}\cdots v_{i+1}v_iv_jv_{j+1}\cdots v_\nu v_1$ 的权比汉密尔顿圈 $v_1v_2\cdots v_\nu v_1$ 的权小（参看图 3.15）.

上述算法可以进行多次，使所求得的汉密尔顿圈的权一次比一次减小. 还可以从几个不同的汉密尔顿圈出发分别施行上述算法，然后对所得的结果进行比较，从中选出最好的一个. 以图3.16中的问题为例，第一次选汉密尔顿圈 $ABCDEFA$，它的权为

$$15+16+9+14+2+6=62$$

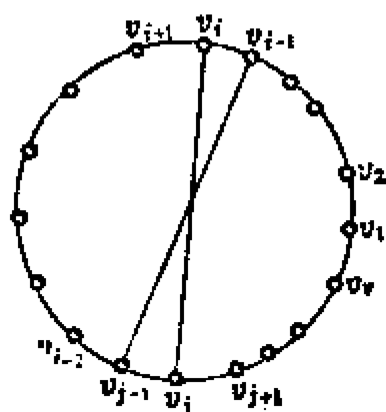


图 3.15

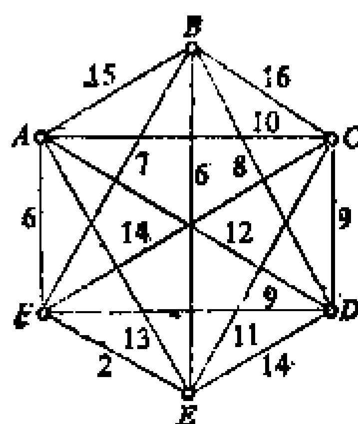


图 3.16

由于

$$w(BE)+w(AD)<w(AB)+w(DE)$$

故用汉密尔顿圈 $CBEFADC$ 来代替原来的汉密尔顿圈，它的权为

$$16+6+2+6+12+9=51.$$

参看图 3.17 .

又因

$$w(BD)+w(AC)<w(AD)+w(BC)$$

故用汉密尔顿圈 $DCAFEBD$ 代替图 3.17 中的圈，它的权为

$$9+10+6+2+6+8=41$$

与第一次近似值 62 相比较，现在的结果已有很大改进。

可以给出旅行推销员问题的解的下界的一个估计式。任选加权完全图 K_ν 的一个顶点 v，用克拉斯科算法求出 $K_\nu-v$ 的最优树 T。设 C 是最优的（即权最小的）汉密尔顿圈，显然 $C-v$ 也是 $K_\nu-v$ 的一个支撑树，因此

$$w(T)\leqslant w(C-v)$$

设边 a 和边 b 是 K_ν 与 v 关联的各条边之中权最小和权次小的两条边，显然有

$$w(T)+w(a)+w(b)\leqslant w(C)$$

上式给出 $w(C)$ 的下界的一个估计式，以图 3.16 中的 K_6 为例，这时 K_6-B 的图形为图3.18。

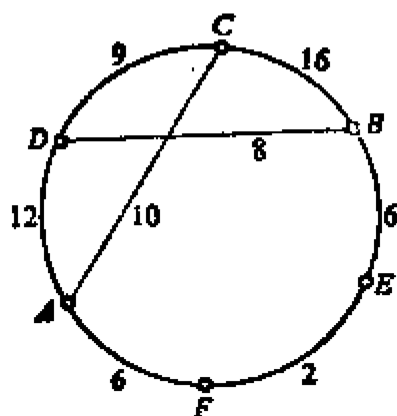


图 3.17

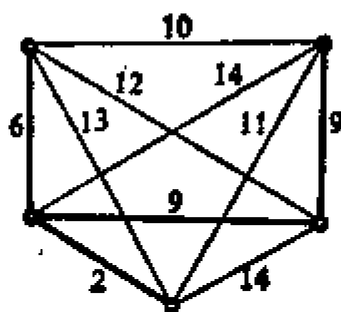


图 3.18

用克拉斯科算法求出它的最优树 T，在图 3.18 中用粗边画出，T 的权

$$w(T)=26$$

与顶点 B 关联的各条边之中权最小和权次小的边分别为 BE 和 BF，因此最优汉密尔顿圈 C 满足

$$\begin{aligned}39&=26+6+7\\&=w(T)+w(BE)+w(BF)\leqslant w(C)\leqslant 41\end{aligned}$$

由此可见，汉密尔顿圈 $DCAFEBD$ 是一个很好的近似解。

习　题

3.5.1　证明下述算法给出连通图 G 的最优树 T^*：

(1) 在 G 的一切非割边中选 e_1，使得 $w(e_1)$ 最大；

(2) 当 $G_k=G-\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$ 确定后，在 G_k 的一切非割边中选 e_{k+1}，使 $w(e_{k+1})$ 最大；

(3) 当步骤(2)不能进行时即停止。

3.5.2　证明下述算法给出连通图 G 的最优树 T^*：

(1) 任选顶点 x_1，在与 x_1 关联的连杆中选 x_1x_2，使 $w(x_1x_2)$ 最小；

(2) 如果已选定顶点 $x_1,x_2,\cdots,x_k$，并且关于每个顶点 $x_j(1<j\leqslant k)$ 还选定了连杆 $x_ix_j(i<j)$，则在一切形状为 $x_ix(1\leqslant i\leqslant k, x\notin\{x_1,x_2,\cdots,x_k\})$ 的连杆中选定 x_ix_{k+1}，使得权 $w(x_ix_{k+1})$ 最小；

(3) 当步骤(2)不能进行时即停止。

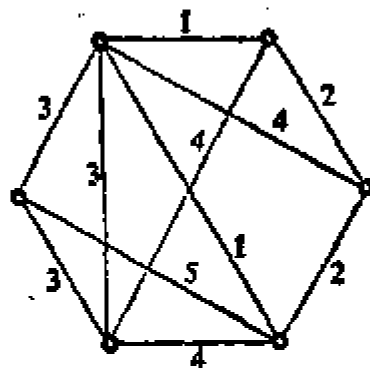


图 3.19

3.5.3　分别用克拉斯科算法以及习题 3.5.1 和 3.5.2 中的算法求赋权图 G（图 3.19）的最优树。

3.5.4　如果图 G 的任何两条边的权都不同，证明 G 的最优树唯一。

3.5.5　证明图 G 的任何一个最优树都可由克拉斯科算法以及习题3.5.1 和 3.5.2 中的算法得到。

3.5.6　适当修改克拉斯科算法，从而给出求赋权连通图 G 中权最大的支撑树的算法．以图 3.16 中的图为实例给以说明。

3.5.7　设 G 是一个赋权图．以克拉斯科算法为基础给出求 G 中权最小的支撑林的算法。

3.5.8　设 G 是一个权为正实数的赋权连通图，$E_1\subseteq E(G)$．设计一个算法来求 G 的连通支撑子图 H，使得

(1) $E_1\subseteq E(H)$，

(2) 在(1)的前提下要求 $w(H)$ 尽可能地小。

3.5.9　在与图 3.16 对应的旅行推销员问题中，如果分别去掉顶点 C、D 和 E 将相应得到旅行推销员问题的解的取什么值的下界估计？

参考文献

Cayley, A. (1889). A Theorem on trees. Quart. J. Math., 23,376—78
(关于凯莱公式以及与树的计数有关的其它问题可参阅：
Berge, C. (1985). Graphs, North Holland, Amsterdam, p.p. 40—51
Wilson, R. J. (1979), Introduction to graph theory, Longman Group Limited, London, p.p. 50—52)
Kruskal, J. B. Jr (1956). On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. Proc. Amer. Math. Soc., 7,48—50
Prüfer. H. (1918). Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen. Arch. Math. Phys., 27,742—44

第四章 平 面 图

4.1 平图

在第一章里给出的图的抽象定义并不涉及图形。但是显而易见，抽象定义的图与由点和线画出的图形之间有着紧密的联系。因此，研究与某些特殊的图形有关的性质，自然会成为图论的内容之一。这一节的目的就是研究按某种特殊要求画在平面上的图，即平图。

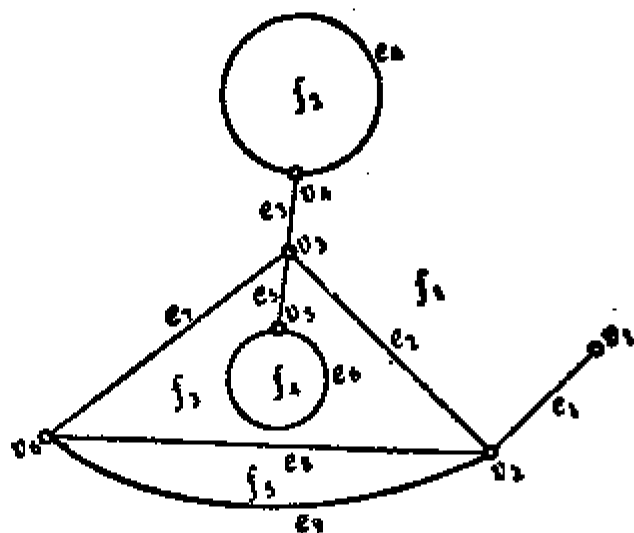


图 4.1

设平面上给定有限个点以及以这些点为端点的有限条连续曲线，假定每一条曲线最多只在它的两个端点处自身相交，而任意两条曲线最多也只在它们的端点处相交，那么由这些点与曲线构成的平面图形叫做**平图**。

如果把点看成顶点，曲线看成边，那么平图就是一个图。例如图 4.1 中画出的就是一个平图，它的顶点集 $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$，它的边集 $E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9\}$。

去掉平图 G 的顶点和边以后平面被分成若干区域。同一个区域中的任意两点，总可以用不经过 G 的边和顶点的一条连续曲线连接它们；而不在同一区域中的任意两点，不管用连续曲线怎样连接它们，曲线总要经过 G 的边或者顶点。每一个区域的边界都是由平图 G 的顶点和边组成的。一个区域再添加上它的边界就构成

了这个平图的一个面．例如图 4.1 中的平图有五个面 f_1, f_2, f_3, f_4, f_5．又如其中的面 f_3 的边界是由 4 个顶点 v_2, v_3, v_5, v_6 以及 5 条边 e_2, e_5, e_6, e_7, e_8 组成的．如果 e 是平图 G 的割边，则 e 只属于 G 的一个面，否则 e 总属于 G 的两个面．任意一个平图 G 都有唯一的面是无界的，这个面叫做平图 G 的**外部面**．例如图 4.1 中的平图的外部面是 f_1．

以后约定用 $F(G)$ 表示平图 G 的面集，简记为 F．$\phi(G)=|F(G)|$ 表示平图 G 的面数，简记为 ϕ．

一个面 f 所包含的边数叫做 f 的**度**，记为 $d(f)$．特别约定，如果割边 e 属于平图的面 f，那么在计算 $d(f)$ 时 e 要计算两次．例如图 4.1 中的 e_1 和 e_3 都是割边，因此在计算 f_1 的度时它们都要算两次，故 $d(f_1)=8$．又如面 f_3 的边中 e_5 也是割边，所以 $d(f_3)=6$．作这样的约定以后，就可以把一个面 f 的度 $d(f)$ 理解为从 f 的边界上某个顶点开始，按任意选定的一个方向沿着 f 的边界围绕一周所经过的边数．例如图 4.1 中 f_1 的边界就是封闭曲线 $v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_4e_4v_4e_3v_3e_7v_6e_9v_2e_1v_1$，其中割边 e_1、e_3 都出现了两次．按照上面的约定，我们还可以获得类似于握手引理(定理 1.1)的下列定理．

定理 4.1　如果 G 是平图，则

$$\sum_{f\in F(G)} d(f)=2e(G) \tag{4.1}$$

证　为了证明这个等式，只需注意等式的左端表示 G 的各个面的度的总和，面在其计数的过程中，G 的每一条割边虽然只属于一个面，但在计算这个面的度时，这条割边要计算两次；面 G 的非割边恰属于两个面，在计算这两个面的度时这条边分别各计算一次．因此在计算各个面的度的总和时，G 的每一条边都恰好计算两次，故等式成立．□

与推论 1.2 的道理一样，立即得出

推论 4.2 在任何平图中，度为奇数的面的个数为偶数。

下面是关于平图的一个重要公式，即所谓欧拉公式。

定理 4.3 如果 G 是连通平图，则

$$\nu(G)-\varepsilon(G)+\phi(G)=2 \tag{4.2}$$

证　对 G 的面数 ϕ 进行归纳。$\phi=1$ 时 G 中无圈，又 G 是连通的，因此 G 是树，由定理 3.1 知 $\varepsilon=\nu-1$，公式显然成立。

设 G 是面数 $\phi\geqslant 2$ 的任一连通平图，且对于面数小于 ϕ 的连通平图，(4.2)已获证．显然 G 至少有一条非割边 e，因此 $G-e$ 仍是连通平图，并且 $\phi(G-e)=\phi(G)-1$，根据归纳假设有

$$\nu(G-e)-\varepsilon(G-e)+\phi(G-e)=2$$

再由 $\nu(G-e)=\nu(G)$，$\varepsilon(G-e)=\varepsilon(G)-1$，从而得到

$$\nu(G)-\varepsilon(G)+\phi(G)=2 \square$$

推论 4.4 如果平图 G 有 ω 个连通分支，则

$$\nu-\varepsilon+\phi=\omega+1 \tag{4.3}$$

证　对 G 的每个连通分支 G_i 用一次欧拉公式，$i=1,2,\cdots,\omega$，相加后得到

$$\sum_{i=1}^{\omega}\nu(G_i)-\sum_{i=1}^{\omega}\varepsilon(G_i)+\sum_{i=1}^{\omega}\phi(G_i)=2\omega$$

再注意到 $\sum\limits_{i=1}^{\omega}\nu(G_i)=\nu(G)$，$\sum\limits_{i=1}^{\omega}\varepsilon(G_i)=\varepsilon(G)$。而在计算每个 G_i 的面时都用过一次无界面，因此 $\sum\limits_{i=1}^{\omega}\phi(G_i)=\phi(G)+\omega-1$。由以上各等式立刻得出(4.3)。$\square$

习　题

4.1.1 对下列各平图验证欧拉公式：

(1) 轮 W_n；

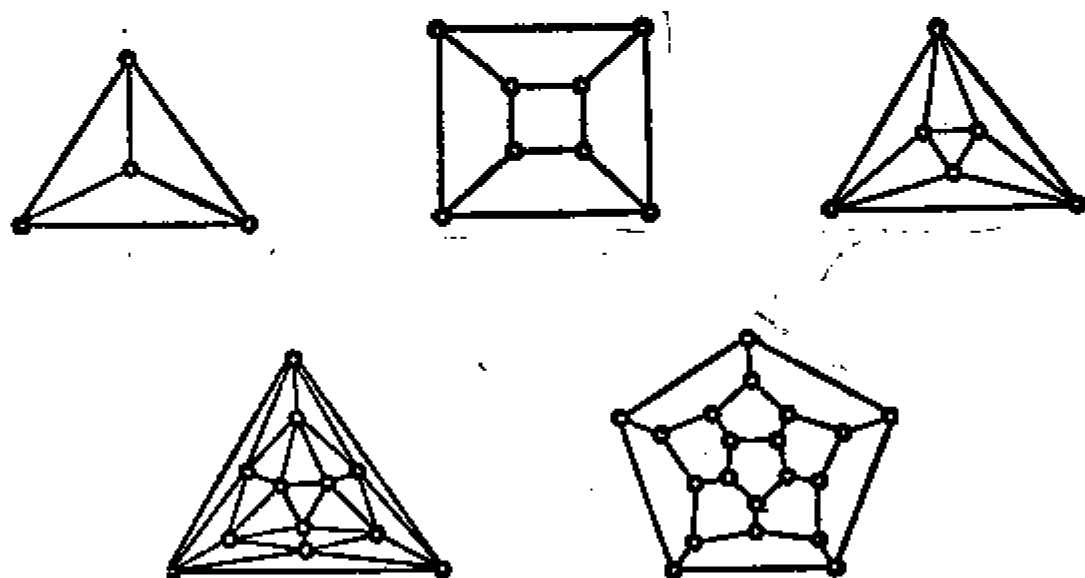


图 4.2

(2) 柏拉图图，即表示五种正十二面体的平图(图 4.2)；

(3) 在平面直角坐标系中以(i,j)为顶点，$i=0,1,\cdots,m$，$j=0,1,\cdots,n$。以平行于坐标轴的线段为边，由 $m\times n$ 个单位正方形拼成的 $m\times n$ 长方形。

4.1.2 (1) 是否存在这样的简单图，它的某个顶点的度大于其余顶点度的和？

(2) 是否存在这样的简单平图，它的某个面的度大于其余面的度的和？

(3) 试对简单平图加以适当的条件，使得它任意一个面的度不超过其余面的度的和。

4.1.3 证明对于任意 f 个($f\geqslant2$) 整数 $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_f$，只要 $d_1\geqslant3$，$\sum\limits_{i=1}^{f}d_i$ 为偶数，都存在简单平图 G，使 G 有 f 个面，这 f 个面的度分别为 $d_1,d_2,\cdots,d_f$。

(提示：可先对 $d_f\leqslant4$ 讨论，并注意到由某个面上的一个顶点在这个面内引一条长为 k 的路，就可以把这个面的度增加 $2k$。)

4.2 图的嵌入及平面图

给出了平图的定义之后，自然会提出下面的问题：是否任一个图 G 都与某一个平图同构？也就是说，能否把任一个图 G 的顶点用平面上的点表示，边用连续曲线表示，使所得到的平面图形是一个平图？如果不能，那么能否给出一个方法来判断什么样的图存在某一个平图与它同构？此外，与某个平图同构的图具有一些什么样的性质？以上的这些问题，既是本节讨论的主要问题，也是本章的中心问题。

为了把问题弄得更清楚，先引入图的嵌入的概念。设给定了一个曲面 S(或三维空间 R^3)。与平面上的情况类似，在 S 上(R^3 中)取定有限个点以及有限条以上述点为端点的连续曲线，除了端点可以作为公共点外，这些曲线不允许再有其它的交点。那么，以上述的点为顶点，连续曲线为边就得到一个图 $\tilde{G}$。如果 S 上(R^3 中)存在如上的图 $\tilde{G}$ 与给定的图 G 同构，则称图 G **可以嵌入曲面** $S(R^3)$，并称 $\tilde{G}$ 是 G 在 S 上(R^3 中)的一个**嵌入**。特别当图 G 可以嵌入平面(即存在平图 $\tilde{G}$ 与 G 同构)，则称 G 为**平面图**，$\tilde{G}$ 叫做 G 的一个平面嵌入。关于图的嵌入问题首先有下面的结果。

定理 4.5　任何图 G 都可以嵌入三维空间 R^3。

证　为了证明这个定理，只需确实构造出图 G 在 R^3 中的一个嵌入。首先在 R^3 中取一条直线 l，再取 $e(G)$ 个半平面与 G 的各条边一一对应，这些半平面都以直线 l 为界而不互相重合。然后在 l 上取 $\nu(G)$ 个点与 G 的顶点一一对应，如果 G 中有顶点 w 上的环 e_1，就在与 e_1 对应的半平面中画一个圆与 l 相切于 w 的对应点；如果 $e_2=uv$ 是 G 的一条连杆，则在 e_2 对应的半平面上画一个半圆，使它的两个端点分别是直线 l 上与 u、v 对应的两个点。显然，这样得到的图形是 G 在 R^3 中的一个嵌入。□

是不是每一个图也都可以嵌入平面呢？远非如此。虽然存在

大量可以嵌入平面的图，例如 K_4 就是一个平面图，因为它与图 4.3 中的平图同构. 但是，也有许多图不是平面图，例如 $K_{3,3}$ 就不是平面图. 下面说明 $K_{3,3}$ 不能嵌入平面. 反证. 设与 $K_{3,3}$ 同构的平图的顶点集的二分划为 (X,Y)，$X=\{x_1,x_2,x_3\}$，$Y=\{y_1, y_2, y_3\}$. 由于 y_1,y_2 与每个 x_i 都相邻，$i=1,2,3$，因此由 y_1 到 y_2 有三条分别经过 x_1,x_2,x_3 的路，这三条路把平面分成三个区域 D_1,D_2,D_3(如图 4.4). y_3 一定属于这三个区域的某一个. 若 y_3

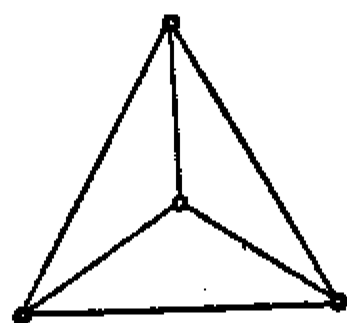


图 4.3

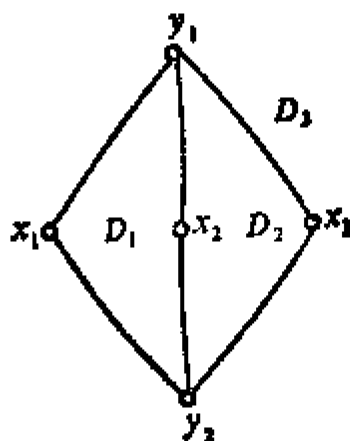


图 4.4

在区域 D_3 内，则边 x_2y_3 必须穿过圈 $x_1y_2x_3y_1x_1$；若 y_3 在 D_1 内，边 x_3y_3 就要穿过圈 $x_1y_2x_2y_1x_1$；这些都与平图的定义矛盾. y_3 在 D_2 内也同样会导致矛盾. 因此不存在与 $K_{3,3}$ 同构的平图，即 $K_{3,3}$ 不是平面图.

只要找到一个非平面图，显然就可以找到无穷多个非平面图. 例如，$K_{3,3}$ 既是非平面图，那么凡是以 $K_{3,3}$ 为子图的图都是非平面图. 此外，还可以利用下面的两个概念发现许多平面图或非平面图.

图 G 中收缩连杆 e 所得到的图 $G\cdot e$ 称为 G 的**收缩**. 图 G 经过一系列的收缩所得到的图称为 G 的**缩并**. 例如图 4.5 中，G_1 是由 G 收缩连杆 e_1 得到的，$G_1=G\cdot e_1$. G_2 是由 G_1 收缩连杆 e_2 得到的，$G_2=G_1\cdot e_2$. G_1 和 G_2 都是图 G 的缩并.

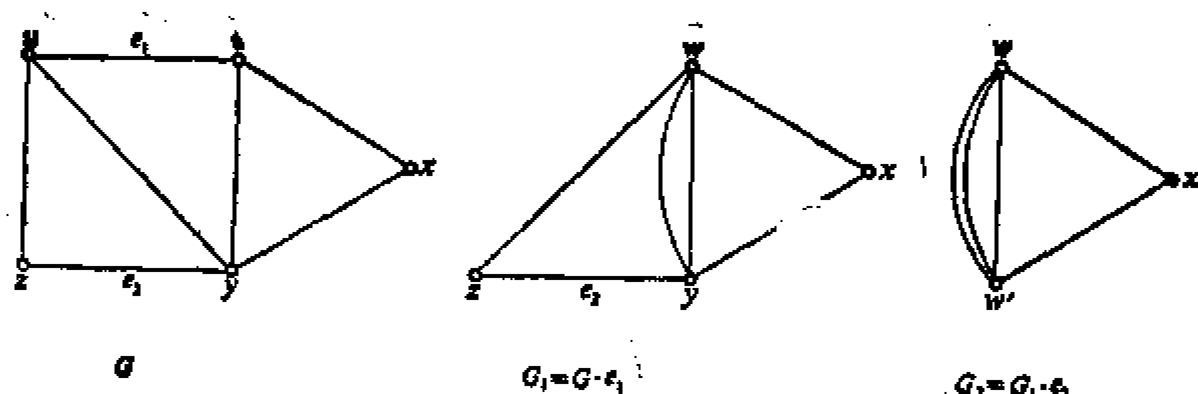


图 4.5

如果一个图是平面图，显然它的缩并也必是平面图；因此一个图的缩并若不是平面图，那么原来的图肯定也不是平面图.

设 uv 是图 G 的一条边，如果在边 uv 上添加一个顶点 w，并把 uv 变成两条边 uw 和 vw，而 G 的其余的点和边保持不变，那么这个步骤就叫做对图 G 的边 uv **剖分**. 如果对 G 进行一系列剖分（不一定都对同一条边），则最后得到的图叫做 G 的**剖分图**. 如果 G_1 与 G_2 同为一个图 G 的剖分图，则称 G_1 和 G_2 **同胚**. 容易看出，一个图与它的剖分图或者都是平面图，或者都不是平面图. 进一步说，两个同胚的图之间也有上面的关系.

此外，再指出下面的事实：判断一个非简单图是否为平面图，只需去掉它的环，并把重边变成单边，然后看这样得到的简单图是否为平面图，即一个重图与它的底图同为平面图或非平面图.

下面给出一个以后要用到的定理.

定理 4.6　图 G 可以嵌入球面 S 的充要条件是 G 为平面图.

证　令 $z'z$ 是球面 S 的一条直径. 取平面 P 切球面于 z'. 那么对于 S 上的任一点 $x\neq z$，直线 zx 必与 P 相交于一点 x'；反之，对于任一点 $y'\in P$，直线 zy' 必与球面有一交点 $y\neq z$. 用这种方法建立了点集 $S-\{z\}$ 与点集 P 间的一一对应. 平面 P 上的一段连续曲线对应到 S 上仍为一段连续曲线；反之，S 上的一段不经过 z 的连续曲线对应到 P 上也是一段连续曲线. 这样，如果图

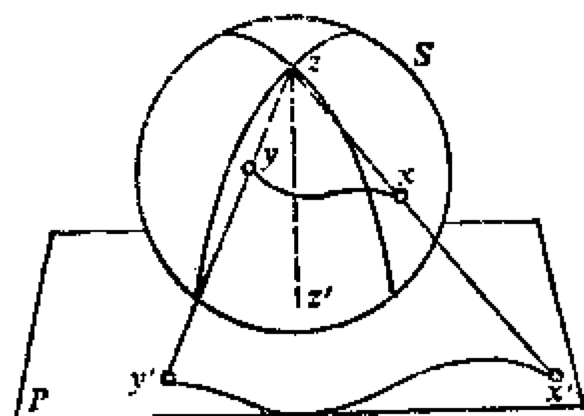


图 4.6

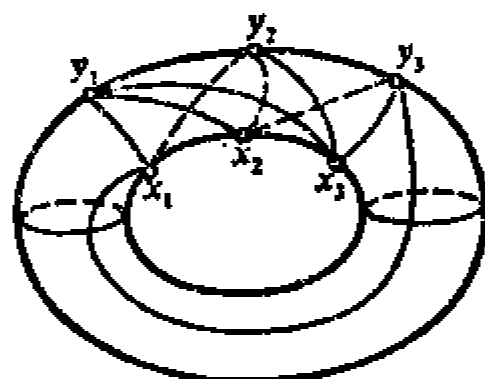


图 4.7

G 在 P 上有一个平面嵌入，就会得到 G 在 S 上的一个球面嵌入；反之，如果 G 在 S 上有一个球面嵌入 G' 时，只需把 z 取在 G' 的顶点和边之外，也就能得到 G 在 P 上的一个平面嵌入．□

对于其它的曲面 S，图 G 可嵌入平面与可嵌入 S 就未必有这种等价关系了．例如前面已经证明了 $K_{3,3}$ 不能嵌入平面，但是它却可以嵌入环面．图 4.7 给出了 $K_{3,3}$ 在环面上的一个嵌入．

环面实际上可由安了一个把柄的球面(如图4.8(a))经过连续变形而得到．这就是说，有些图(例如 $K_{3,3}$)不能嵌入球面，却能嵌入一个安了一个把柄的球面．不过还是有许多图对于安有一个把柄的球面仍然不能嵌入．可以证明，K_8 就不能嵌入安有一个把柄的球面，却可以嵌入带有两个把柄的球面(如图 4.8(b))．

不难说明任意一个图都可以嵌入带有若干把柄的球面上．因

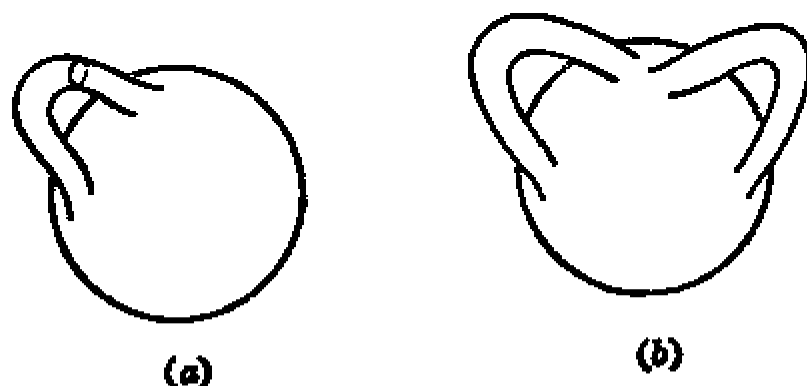


图 4.8

为任意一个给定的图总可以按下列要求画在球面上，使得除端点外没有三条边(它们都由连续曲线表示)相交于同一个点．当每两条边相交时，就在球面上添加一个把柄，把其中一条边改画在把柄上，使原来相交的两条边呈立体交叉．当关于每一对相交的边都进行这样的改造之后，就把给定的图嵌入到带若干把柄的球面上．以上的论证实际上给出了任意一个图都可以嵌入三维空间 R^3 的又一证明．有趣的是，弗内歇(M.Fréchet)和樊畿在 1967 年证明了对于每个曲面 S，总存在不能嵌入 S 的图．这样一来，对所有的图可以作出如下的分类．如果一个图能够嵌入带有 m 个把柄的球面，而不能嵌入带有 $m-1$ 个把柄的球面，就把这个图纳入类 C_m；此外，全体平面图记为 C_0．我们称属于类 C_m 的图的**亏格**是 m．根据以上的论述，这是对图的一种无限分类，而且对于每个非负整数 m，C_m 都非空．事实上，根据弗内歇和樊畿的结果，存在不能嵌入带有 $m-1$ 个把柄的球面的边数最少的图 G_0，又若 e 是 G_0 的一条边，G_0-e 能嵌入带 $m-1$ 个把柄的球面，由于添加一条边至多需添一个把柄，于是 G_0 一定可以嵌入到带 m 个把柄的球面上．

关于图的一般嵌入问题就讲到这里，现在回到平面嵌入这一中心问题．首先，一个给定的图的平面嵌入不一定唯一．例如，图 4.9 的(a)，(b)就是同一个图的不同的平面嵌入，这里所说的平面嵌入不同，是指作为平图而言其“结构”不同．因为平图不仅具有顶点和边，而且还有面的概念，因此两个平图从平图的角度具有相同的“结构”是指：一方面作为抽象的图，它们同构；另一方面还要求它们的面之间有这样的一一对应关系，使得对应面的边界上的顶点必需按相邻顺序一一对应．按照这个要求，图 4.9(a)、(b)的两个图显然“结构”不同，这是因为(a)有一个面的度为 5，而(b)却不存在度为 5 的面．尽管如此，我们却有如下的定理．

定理 4.7　给定的平面图的任意一个平面嵌入具有相同的面

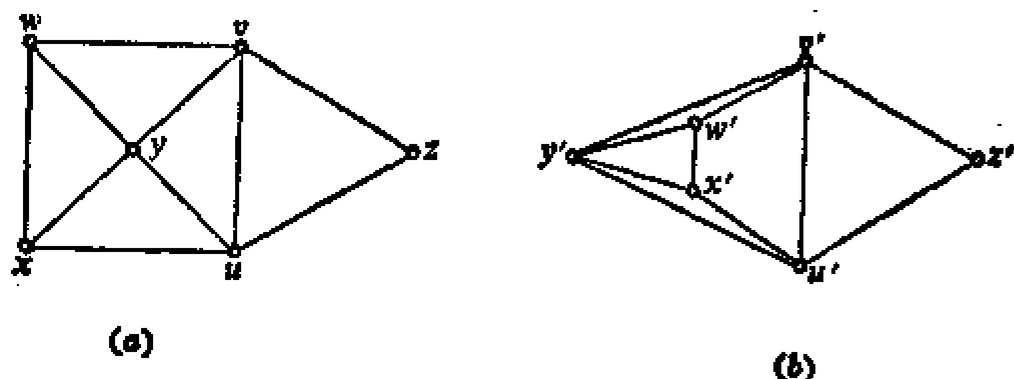


图 4.9

数.

证　因给定平面图的顶点数、边数和连通分支数都是固定的，根据公式(4.3)，它的任一平面嵌入的面数 $\phi=e-\nu+\omega+1$，故为定值. □

定理 4.8　设 G 是一个简单平面图，$\nu(G)\geqslant 3$，则

$$e(G)\leqslant 3\nu(G)-6 \tag{4.4}$$

证　因为 G 和它的平面嵌入有数目相同的顶点和边，故只须在 G 是简单平图的情形证明(4.4). 因为对于 G 不连通的情形，只要在它的连通分支之间适当连接一些边，就得到简单连通平图 G'. 由于 $e(G')>e(G)$，$\nu(G')=\nu(G)$，如果对 G' 证明了(4.4)，则(4.4)关于 G 也一定成立. 故不妨假定 G 连通.

因为 G 简单连通且 $\nu(G)\geqslant 3$，不难看出对于 G 的任意一个面 f 都有 $d(f)\geqslant 3$. 因此

$$\sum_{f\in F(G)} d(f)\geqslant 3\phi(G)$$

但从定理(4.1)有

$$\sum_{f\in F(G)} d(f)=2e(G).$$

所以

$$2e(G)\geqslant 3\phi(G) \tag{4.5}$$

因 G 是连通平图，把(4.5)代入欧拉公式(4.2)可得

$$\nu(G)-\varepsilon(G)+\frac{2}{3}\varepsilon(G)\geqslant 2.$$

由此推出

$$\varepsilon(G)\leqslant 3\nu(G)-6 \square$$

定理 4.9 若 G 是简单平面图，则

$$\delta(G)\leqslant 5 \tag{4.6}$$

证 当 $\nu(G)\leqslant 2$ 时，(4.6)显然成立. 当 $\nu(G)\geqslant 3$ 时，利用握手引理及(4.4)，有

$$\delta(G)\cdot\nu(G)\leqslant \sum_{v\in V(G)} d(v)=2\varepsilon(G)\leqslant 6\nu(G)-12$$

由此立即得到 $\delta(G)\leqslant 5$. $\square$

图 G 中最短圈的长称为 G 的**围长**；如果 G 没有圈，则定义 G 的围长为无穷大. 可以用围长给出连通平图的边数的上界.

定理 4.10 若 G 是含有圈的连通平面图，且其围长 $g\geqslant 3$，则

$$\varepsilon(G)\leqslant g(\nu(G)-2)/(g-2) \tag{4.7}$$

证 由于一个平面图与其任意一个平面嵌入的顶点数、边数和围长对应相等，因此不妨设 G 为含圈的连通平图. 因为 G 的每个面 f 均有 $d(f)\geqslant g$，故

$$2\varepsilon(G)=\sum_{f\in F(G)} d(f)\geqslant \phi g$$

即

$$\phi\leqslant \frac{2\varepsilon(G)}{g} \tag{4.8}$$

把(4.8)代入欧拉公式(4.2)得

$$\nu(G)-\varepsilon(G)+\frac{2\varepsilon(G)}{g}\geqslant 2$$

所以

$$e(G) \leqslant g(\nu(G)-2)/(g-2) \quad \square$$

例 1 证明 K_5 不是平面图.

证 对于 K_5 有 $\nu=5$, $e=10$, 不满足(4.4), 因此 K_5 不是平面图.

由例 1 可以看出, 利用关于平面图的不等式来证明某些图的非平面性是相当方便的. 以前已经证明过 $K_{3,3}$ 不是平面图,现在用关于平面图的不等式再一次证明这个结论. 对于 $K_{3,3}$有 $e=9$, $\nu=6$,与不等式(4.4)并不矛盾. 可是 $g(K_{3,3})=4$, $g(\nu-2)/(g-2)=8$ 这与不等式(4.7)矛盾. 因此 $K_{3,3}$ 不是平面图.

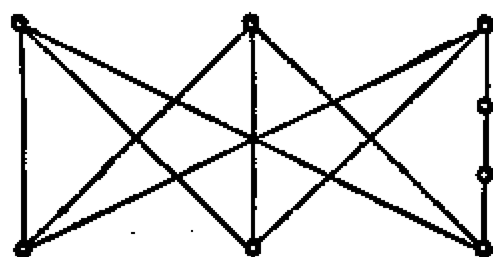
为什么利用定理 4.8 不能证明的结论,用定理 4.10 却可以证明呢? 试比较一下这两个定理. 设图 G 满足定理 4.10 的条件. 当 G 无圈时,G 是林,定理4.8的结论显然成立;当 G 有圈时,因$g \geqslant 3$,$g/(g-2) \leqslant 3$, 故 $g(\nu-2)/(g-2) \leqslant 3\nu-6$. 这说明定理 4.10 中给出的 e 的上界不超过定理 4.8 中的上界,所以在一般情况下,定理 4.10 比定理 4.8 强.

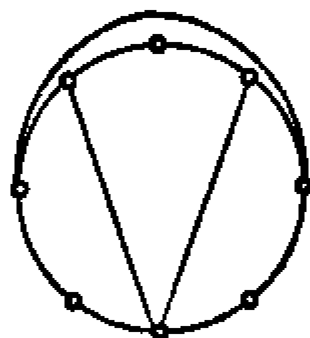
尽管定理 4.10 通常强于定理 4.8, 但是把它当作判断一个图是否为平面图的准则还是不行的. 例如图 4.10 是在 $K_{3,3}$ 的一条边上添加了 2 个点, 这个图的边数 $e=11$, 顶点数 $\nu=8$, 围长 $g=4$,确实有 $e<g(\nu-2)/(g-2)$,但它并不是平面图. 实际上,使用边数、顶点数、围长之间的不等式关系无法判定一个图是否为平面图.例如图 4.10 和图 4.11 里的两个图具有同样的边数、顶点数和围长,但它们却一个是平面图,而另一个不是平面图.

那么,究竟怎样给出一个平面图的判断准则呢? 1930 年波兰数学家库拉托夫斯基(C.Kuratowski)从图的本身结构考虑, 给出了一个图是平面图的充分必要条件.

定理 4.11(库拉托夫斯基定理) 一个图为平面图的充分必要条件是它不包含 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分图.

由于 K_5 和 $K_{3,3}$ 都不是平面图, 因此它们的剖分图也不是平


图 4.10


图 4.11

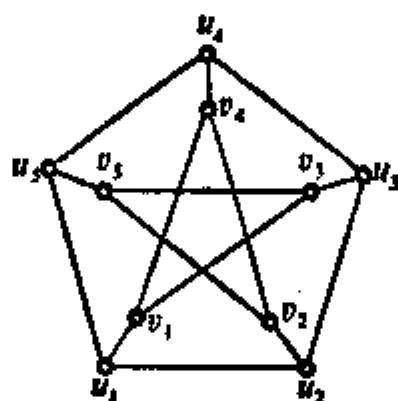


图 4.12

面图，又因以非平面图为子图的图一定不是平面图，所以这个定理中条件的必要性是极为明显的．但是充分性的证明相当复杂．尽管一些数学家对原来的证明作了改进，写出来仍很占篇幅，因此就不在这里叙述了．对证明感兴趣的读者可参看邦迪和默蒂的《图论及其应用》，或是哈拉里的《图论》．

此外，1937年瓦格纳(K.Wagner)给出了平面图的另一判断准则．

定理 4.12（瓦格纳定理）一个图为平面图的充分必要条件是它不含有可缩并到 K_5 和 $K_{3,3}$ 的子图．

例如用瓦格纳定理很容易判断图 4.12 中的彼得森图不是平面图．事实上，只要对边 $u_iv_i(i=1,2,3,4,5)$ 进行收缩，它就缩并到 K_5，因此彼得森图不是平面图．

图 4.13(a)称为希伍德(Heawood)图．如果用库拉托夫斯基定理判断它的平面性，只需把边 u_1u_2、u_3u_4、u_5u_6、u_7u_8 去掉，剩下的图如图 4.12(b)，它是$K_{3,3}$的剖分图，所以希伍德图不是平面图．如果用瓦格纳定理去判断，需经过数次收缩，最后可以缩并为 K_5，过程就要麻烦一些．

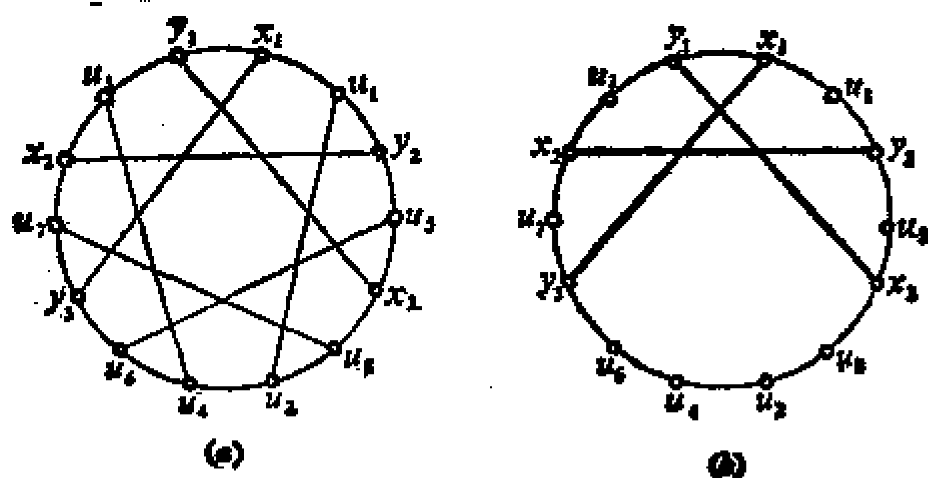


图 4.13

库拉托夫斯基定理与瓦格纳定理尽管在理论上十分完美，但是要用它们来检验一个图是否为平面图仍然十分困难．尤其是图的阶很大时，就十分需要有一种算法来检验图的平面性．关于这方面，加拿大数学家塔特(W.T.Tutte)和我国数学家吴文俊都给出过图的平面性算法．在邦迪和默蒂的《图论及其应用》一书中，也介绍了一种图的平面性算法，读者可以参考．

K_5 和 $K_{3,3}$ 的剖分图经缩并后得到 K_5 和 $K_{3,3}$，因此库拉托夫斯基定理可以粗略表述为，图之所以不能嵌入平面，原因在于其中出现了 K_5 和 $K_{3,3}$，也就是说，使得图不为平面图的实质性障碍只有两个，即 K_5 和 $K_{3,3}$．与带有 $g\geqslant 0$ 个把柄的球面同胚的曲面称为亏格为 g 的曲面．球面和平面是亏格为零的曲面；环面是亏格为 1 的曲面．前边已经叙述过弗内歇和樊畿的结果，对任何整数 $g\geqslant 0$，都有不能嵌入到亏格为 g 的曲面上的图．很自然会提出问题：对任何整数 $g\geqslant 0$，是否关于亏格为 g 的曲面也存在库拉托夫斯基型的定理？也就是说，图之所以不能嵌入亏格为 g 的曲面的实质性障碍是否也只有有限多个？（$g=0$ 的情形只有两个障碍，即 K_5 和 $K_{3,3}$．）

罗伯逊(N. Robertson)和塞姆尔(P. Seymour)已在最近肯定地回答了这两个问题．以下简略地介绍他们两人的结果．首先

引入图的亚图(Minor)的概念．考虑如下的两种类型的关于图的运算：

(a) 用图的一个子图来代替图自身；

(b) 缩并图中的一条连杆．

如果由图G通过有限多次属于上述两种类型的运算而得到图H，则称H为G的亚图．利用亚图的概念，显然可以把库拉托夫斯基定理4.11重新叙述为：图可以嵌入平面(或球面)的充分必要条件是它不以K_5或$K_{3,3}$为亚图．

定理 4.12(Robertson, Seymour) 对任何给定的整数$g\geqslant 0$，都存在由有限个图构成的集合$\mathscr{L}=\mathscr{L}(g)$．图$G$可以嵌入亏格为$g$的曲面的充分必要条件是$G$不以$\mathscr{L}$中的任何一个图为其亚图．

库拉托夫斯基定理是定理4.12当$g=0$的特殊情形，这时$\mathscr{L}(0)$由K_5和$K_{3,3}$构成．

普遍认为罗、塞二人得到的结果是近年来图论中最重要、最深刻的结果之一．定理4.12只是他们的主要结果之一的一个推论，他们的结果远比定理4.12深刻得多．罗、塞二人的最重要的结果是证明了瓦格纳(K.Wagner)猜测：任何由无限多个图构成的图集中一定存在两个图，使得其中的一个图是另一个图的亚图．

设$\mathscr{L}$表示由有限个图构成的集合．考虑不以$\mathscr{L}$中的任何一个图为亚图的一切图的集合$\mathscr{M}$．显然$\mathscr{M}$中的任何一个图的亚图也是$\mathscr{M}$中的图，这样的集合$\mathscr{M}$称为亚图封闭的．罗、塞二人得到的另一个重要结论是证明了反过来的结果也成立：设$\mathscr{M}$是一个亚图封闭的图集合，则存在由有限个图构成的集合$\mathscr{L}$，使得$\mathscr{M}$恰是不以$\mathscr{L}$中的任何一个图为其亚图的一切图构成的集合．考虑可以嵌入到亏格为g的曲面上的一切图构成的图集合$\mathscr{M}$，显然这个图集合是亚图封闭的，从而存在由有限个图构成的图集合$\mathscr{L}=\mathscr{L}(g)$，使$\mathscr{M}$恰由不以$\mathscr{L}=\mathscr{L}(g)$为亚图的一切图构成，这

正好是定理 4.12。

罗、塞二人的结果预计将以一系列共约 18 篇论文的形式发表，总长度近 500 页。迄今已正式刊出的共 5 篇，感兴趣的读者可参看本章末尾列出的文献。

习 题

4.2.1 证明一个图是平面图当且仅当它的每一个块是平面图。

4.2.2 若去掉一个非平面图的任意一条边就变成了平面图，则称这个非平面图为极小非平面图。证明极小非平面图都是简单块。

4.2.3 设平图 G 的阶是 ν，面数为 ϕ。试用 ν 的一次式表示出 ϕ 的尽可能小的上界。

4.2.4 设图 G_1 与图 G_2 同胚，证明 $\varepsilon(G_1)-\nu(G_1)=\varepsilon(G_2)-\nu(G_2)$。

4.2.5 给出一个与 K_5 及 $K_{3,3}$ 均不同胚的非平面图，给出一个不能缩并到 K_5 或 $K_{3,3}$ 的非平面图。 上面两种图的存在是否和库拉托夫斯基定理或瓦格纳定理矛盾？

4.2.6 每个面的度都是 3 的平图称为**平面三角剖分图**。证明任何一个阶不小于 3 的简单平图都是某一简单平面三角剖分图的支撑子图。

4.2.7 (1) 平面三角剖分图是否一定为简单图？

(2) 画出与 K_5-e 同构的平面三角剖分图。

(3) 画一个 5 正则简单平面三角剖分图。

4.2.8 对于 $\nu\geqslant3$ 的简单平图 G，证明下列三个命题等价：

1) G 是平面三角剖分图；

2) $\varepsilon=3\nu-6$；

3) $\phi=2\nu-4$。

4.2.9 (1) 若 G 是至少有 4 个顶点的简单平面图，证明 G 至少有 4 个顶点的度不超过 5。

(2) 对 4 个不相交的 K_4 添加边，构造一个 16 阶平图，使它只有 4 个点的度不超过 5。

4.2.10 判断图4.14中各图是否为平面图，并说明理由。

4.2.11 当 r,s,t 满足什么条件时，完全三部图 $K_{r,s,t}$ 是平面图？

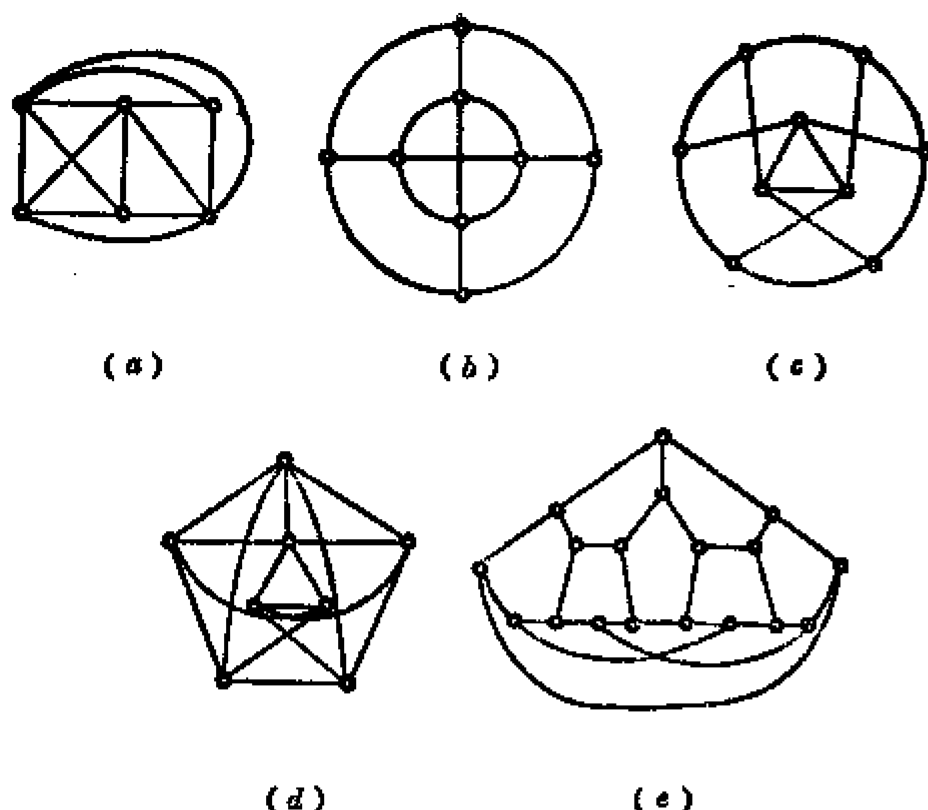


图 4.14

4.2.12 (1) 给出一个 8 阶简单图，使得它和它的补图都是平面图。

(2) 证明若 G 是阶大于 10 的简单图，则 G 和它的补图 $\overline{G}$ 不可能都是平面图。（实际上，可以证明阶大于 8 的简单图就有类似的结论。）

4.2.13 是否存在每个面都是三角形的凸 7 面体？

4.2.14 若一个连通简单图可以嵌入平面，且使它所有的顶点都在同一个面上，则这个图叫做外平面图。

(1) $K_{2,3}$，K_4 是否为外平面图？

(2) 有 ν 个顶点的外平面图最多有多少条边？

(3) 外平面图 G 的最小度 $\delta(G)=$？

4.2.15 边数最多的外平面图叫做最大外平面图。 试画出所有的 7 阶最大外平面图。

4.2.16 证明当 $\nu(G)\geqslant 7$ 时，G 和 $\overline{G}$ 不可能都是外平面图。

4.2.17 如果图 G 可以表为 k 个平面图的并，但不能表为 $k-1$ 个平面图的并，则称 G 的厚度是 k，记为 $\theta(G)=k$。

(1) 证明 $\theta(G)\geqslant\left\lceil\frac{\varepsilon}{3\nu-6}\right\rceil$；

(2) 证明 $\theta(K_\nu) \geqslant \left\lceil \frac{\nu+7}{6} \right\rceil$. 且当 $\nu=8$ 时，其中等式成立，而当 $\nu=9,10$ 时不等式成立.（事实上,除了 $\nu=9,10$ 外对于任意 ν 等式均成立.）

4.2.18 一个图的叉数 $C(G)$ 是把 G 画在平面时，相交边最少的对数. 求彼得森图的叉数.

4.2.19 设 $S=\{x_1,\cdots,x_n\}$ 是平面上 n 个点的点集($n\geqslant 3$)，其中任何两点之间距离至少是 1,证明最多有 $3n-6$ 个点对,其距离恰好是 1.

4.3 对偶图

设 G 是一个平图. 令 G 的每一个面 f 都与唯一的顶点 f^* 相对应. 如果 G 的边 e 同时属于面 f 和 g，就在 f 与 g 的对应顶点 f^* 与 g^* 之间连接一条边 e^*，令 e 和 e^* 相对应. 割边 e 只属于唯一的面 f，这时 e 对应的边 e^* 就是 f 的对应顶点 f^* 上的一个环. 这样就获得了一个图 G^*, G^* 叫做 G 的对偶图. 显然平图 G 的对偶图 G^* 是唯一确定的,而且 $\nu(G^*)=\phi(G)$, $\varepsilon(G^*)=\varepsilon(G)$.

任意一个平图 G 的对偶图 G^* 总是平面图. 事实上，我们可以按以下方式给出 G^* 的一个平面嵌入. 在 G 的每个面 f 内部取一点 f^*,若面 f 和 g 有公共边 e,就在 f、g 的对应点 f^*、g^* 间连接一条曲线 e^*,使 e^* 穿过 e 且与 e 只相交一次,而与 G 的其它的边不相交,并且与 G^* 的各条边除在公共的顶点外也不相交，这样画出的 G^* 就是一个平图. 4.15 中 G 是细线画的平图，用粗线画的平图就是 G 的对偶图.

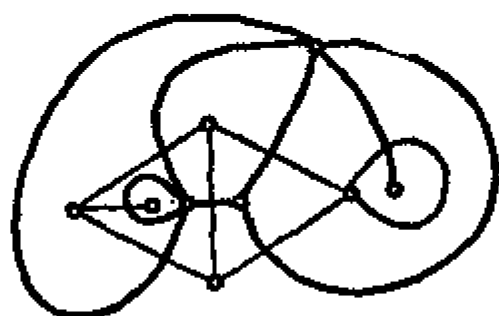


图 4.15

如果平图 G 中的两个面有公共边,则称这两个面相邻. 设 G^* 是平图 G 的对偶图，G^* 中的顶点 f^* 和 g^* 相邻的充要条件为 G 中与 f^*、g^* 对应的两个面 f 和 g 相邻. 对于平图 G 的任意两个面 f、g,显然必有面 $f_1,f_2,\cdots,f_n$，使得 $f_1=f$, $f_n=g$, 且 f_1 与

f_2 相邻，f_2 与 f_3 相邻，$\cdots$，f_{n-1} 与 f_n 相邻. 因此对于平图 G 的对偶图中的任意两个顶点 f^*、g^*，总有一条路连接它们，从而得到下列定理.

定理 4.13　任意一个平图 G 的对偶图是连通图.

应该注意的是，平图 G 的对偶图仅仅是平面图，而对平面图来说没有面的概念，所以不能笼统地讲对偶图的对偶图；但是如果我们把平图 G 的对偶图 G^* 理解为按照前面所讲的方式的平面嵌入，那么就可以定义 G^* 的对偶图 G^{**}. 在这个意义下可以得到下列结果.

定理 4.14　G^{**} 与 G 同构的充分必要条件是 G 为连通图.

证　由定理 4.13 知 G^{**} 是连通图，因此条件的必要性显然成立.

设 G 是连通平图. 把 G^* 的顶点数、边数和面数分别记为 ν^*、ε^*、ϕ^*. 根据 G^* 的作法，知 $\nu^*=\phi$，$\varepsilon^*=\varepsilon$. 由于 G^* 和 G 都是连通平图，它们都满足欧拉公式，故

$$\nu^*-\varepsilon^*+\phi^*=\nu-\varepsilon+\phi$$

从而可得 $\phi^*=\nu$.

设 e^* 是 G^* 的面 f^* 边界上的一条边，根据 G^* 的构造，恰有 G 的一条边 e 与 e^* 相交，而且 e 也仅与 G^* 的边 e^* 相交，即当 e^* 不是割边，则 e 的两个端点必分别在平图 G^* 这样的两个面里边，它们的边界都包含 e^*；如果 e^* 为割边，e 是环，这时只有一个面. 无论哪一种情形 f^* 内至少含有 G 的一个顶点. 又由 $\phi^*=\nu$，所以 G^* 的每个面恰含有 G 的一个顶点. 又按照 G^* 的对偶图 G^{**} 的作法，G^* 的每个面也恰含 G^{**} 的一个顶点，因此，如果把 G^* 的同一个面中的 G^{**} 的顶点和 G 的顶点取成同一个点，就自然地形成了 $V(G)$ 与 $V(G^{**})$ 的一个一一对应，又根据前面对偶图的构造方法，可知对于 G^* 的任一条边 e^*，G 与 G^{**} 都各自恰有一条边 e 和 e^{**} 与 e^* 相交一次，且 e 和 e^{**} 不能再和 G^* 中其它的边相交，

所以 e 和 e^{**} 都是连接 e^* 两侧的同一对顶点，这就说明了 G 与 G^{**} 中的顶点间有相同的相邻关系．因此，$G^{**}\cong G$。 □

习　题

4.3.1 画出下面平图的对偶图。

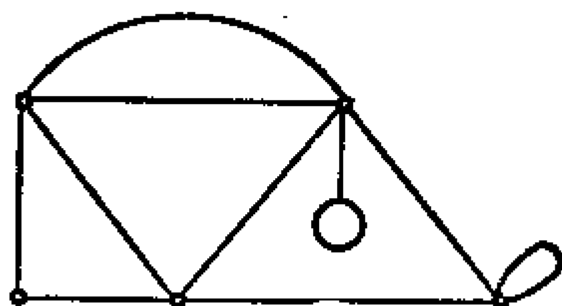


图 4.16

4.3.2 证明任意一个凸多面体不可能每一个面都是 6 边形。

4.3.3 证明如果 G 是 3 连通平图，则 G 的对偶图 G^* 是简单图。

举一个 2 连通平图的对偶图不是简单图的例子。

4.3.4 设 G 是平图，证明若 G 是二部图，则其对偶图 G^* 是欧拉图．且若一个平图的对偶图是欧拉图时，则这个平图是二部图。

4.3.5 证明欧拉平图的对偶图是二部图，若一个连通平图的对偶图是二部图，那么这个平图一定是欧拉图。

4.3.6 设 G 是 $\nu\geqslant 4$ 的简单平面三角剖分图，则其对偶图 G^* 是简单 2 边连通 3 正则平面图。

4.3.7 设 G 是至少有 3 个顶点的 r 正则连通平图，如果它的对偶图 G^* 是 r^* 正则的，则 $(r-2)(r^*-2)<4$。检验柏拉图图满足这种关系，并找出此外所有满足这种关系的图。

4.3.8 若一个平图和它的对偶图同构，则称此图是**自对偶**的。

(1) 证明若 G 是自对偶的，则 $\varepsilon=2\nu-2$。

(2) 设有顶点 v 及 $m(m>1)$ 个 n 圈 $c_n^{(1)},\cdots,c_n^{(m)}$，$u_1^{(i)},\cdots,u_n^{(i)}$ 是圈 $c_n^{(i)}$ 上的 n 个顶点，$1\leqslant i\leqslant m$，连接路 $P_i=vu_j^{(1)}u_j^{(2)}\cdots u_j^{(m)}$，$1\leqslant j\leqslant n$。这样构成的图叫做复轮。验证轮和复轮都是自对偶的。

(3) 画一个非简单图的自对偶图。

(4) 画一个不是轮或复轮的简单自对偶图。

参考文献

Bondy, J. A. and Murty, U. S. R. (1976). Graph Theory with Applications, Macmillan Press LTD, London, 135—156, 163—169. 汉译本：《图论及其应用》(吴望名等译)，科学出版社， 1984, 145—166, 173—180

Fréchet, M. and Ky Fan (1967). Initiation to Combinatorial Topology, Prindle, Weber and Schmidt, Boston

Harary, F. (1969). Graph Theory, Addison Wesley, Reading Mass., Menlo Park, Calif. and London, 102—125. 汉译本：《图论》(李慰萱译)．上海科学技术出版社，1980，119—144

Kuratowski, C. (1930). Sur le problème des courbes gauches en topologie. Fund Math., 271—283

刘彦佩．模2规划与平面嵌入，应用数学学报，4(1978)，321—329

刘彦佩．图的平面性判定与平面嵌入，应用数学学报，4(1979)，350—365

Robertson, N. and Seymour, P. D. (1985). Graph minors— a survey. Surveys in Combinatorics, Proc 10th British Combinatorial Conference, London Math. Soc. Lecture Notes 103

Robertson, N. and Seymour, P. D. (1983). Graph minors I Excluding a forest, J. Comb. theory (B), 35,39—61

Robertson, N. and Seymour, P. D.: Graph minors II Algorithmic aspects of tree-width (to appear)

Robertson, N. and Seymour, P. D. (1984). Graph minors III planar tree-width. J. Comb. theory (B), 36,49—64

Robertson, N. and Seymour, P. D. (1986). Graph minors V Excluding a planar graph. J. Comb. theory (B), 41,92—114

Robertson, N. and Seymour, P. D. (1986). Disjoint paths across a disc, J. Comb. theory (B), 41,115—138

Wagner, K. (1937). über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. Math. Ann., 114,570—590

吴文俊，集成电路设计中的一个数学问题，数学的实践与认识，1 (1973)，20—40

吴文俊，线性图的平面嵌入，科学通报，5 (1974)，226—228

第五章　匹　　配

5.1　匹配与交错路

设G是一个图，M是$E(G)$的一个非空子集．如果M中的边都是连杆且任意两边不相邻，则称M为G的一个**匹配**．图5.1中用粗线表示的边的集合与用波纹线表示的边的集合，各自是所给图的一个匹配．

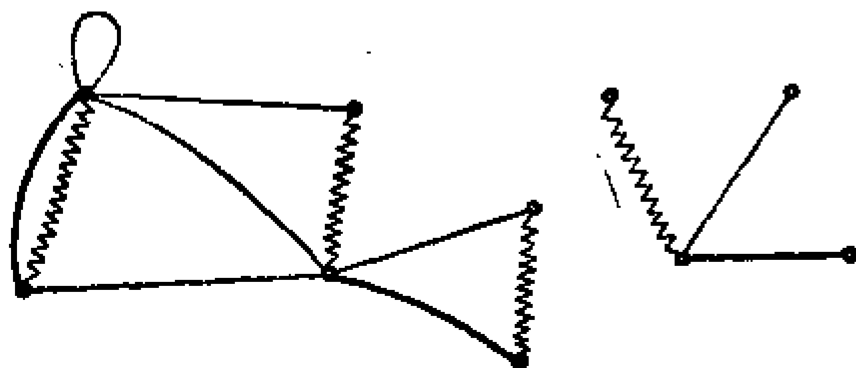


图 5.1

设M是G的一个匹配，v是G的任一顶点．若v与M中的边相关联，则称M饱和顶点v或v为一个**M饱和点**，否则称M不饱和v或v是一个M非饱和点．若G中两个不同的M饱和点u、v与M中的同一条边相关联，则称u和v在M中是互相匹配的．显然，每一个M饱和点恰与另一个M饱和点在M中相匹配，而图中全体M饱和点的个数是一个偶数，即M中的边数的两倍．

一个图可能有不止一个匹配．我们称图中边数最多的匹配为图的**最大匹配**．任何匹配M的边数等于图中M饱和点的个数的一半，而M饱和点的个数不大于图的阶ν．因此，最大匹配的边数小于或等于ν的二分之一．当匹配M的边数等于ν的二分之一，即

图中的每个顶点都是M饱和点时，我们称M为图的一个**完美匹配**．显然，完美匹配必是最大匹配，而最大匹配不一定是完美匹配．图 5.1 中所给出的两个匹配都不是完美匹配，但不难看出用波纹线表示的那一个匹配是最大匹配．由于一个匹配的任何非空子集也是一个匹配，在研究匹配时，令人感兴趣的是最大匹配或完美匹配．

根据定义，匹配中的边不是环，且在图的任一组重边中至多有一条边属于一个给定的匹配．因此在关于匹配的许多问题中删去图中的环与重边，即用相应的底图取代原来的图，对问题的结果并无影响．基于这一点，在本章中我们假定所讨论的图一律是简单图．

设M是G的一个匹配．G中的一条**M交错路**是指一条从起点到终点所经过的边依次交错地属于$E(G)\setminus M$与M的路．在研究有关匹配的问题时，M交错路的概念是很有用的．下面要介绍的贝尔热（C. Berge）的一个定理，就是通过M交错路给出了一个匹配M是最大匹配的充分必要条件．为了证明这个定理，我们先回忆一下两个集合的对称差的概念（参阅习题 3.3.13）．两个集合A与B的**对称差**记为$A\triangle B$，其定义为

$$A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

换句话说，$A\triangle B$是由属于A而不属于B的元素和属于B而不属于A的元素组成的集合．

定理 5.1 设M是图G的一个匹配．M是G的最大匹配的充分必要条件是：G中不存在连接两个不同的M非饱和点的M交错路．

证 必要性 设M是G的最大匹配．假设P是一条连接G中两个不同的M非饱和点u与v的M交错路．令$M'=E(P)\triangle M$，即

$$M'=(E(P)\setminus M)\cup(M\setminus E(P))$$

现在我们来证明 M' 是一个比 M 包含更多的边的匹配，从而导致矛盾.

由于 $M\backslash E(P)\subseteq M$，$M\backslash E(P)$ 中的任意两条边不相邻. 由于 P 是交错路，从其中去掉属于 M 的边之后，剩下的边的集合 $E(P)\backslash M$ 中的任意两条边不相邻. 设 $e_1\in E(P)\backslash M$，$e_2\in M\backslash E(P)$. 显然，e_2 既不能以 u，v 为端点（因 u，v 是 M 非饱和点），也不能以 P 中的 M 饱和点为端点（因任何顶点至多与匹配中的一条边相关联），从而 e_1 与 e_2 不相邻，这就证明了 M' 中任何两条边不相邻，即 M' 是 G 的一个匹配. 另一方面，G 中的 M 饱和点都是 M' 饱和点，且恰有两个 M 非饱和点 u 和 v 是 M' 饱和点. 前已指出，任一匹配中的边数恰等于图中 M 饱和点数的一半. 因此 $|M'|=|M|+1$，这与 M 是 G 中的最大匹配的假设相矛盾.

充分性　设 G 中不存在连接两个不同的 M 非饱和点的 M 交错路而 M 不是 G 的最大匹配. 假设 M' 是 G 的一个最大匹配，于是 $|M'|>|M|$.

令 $H=G[M\triangle M']$，即设 H 是由 M 与 M' 的对称差诱导出的子图. 设 v 是 H 中的任一顶点. 由于 v 要么与 M 或 M' 中的一条边关联，要么与 M 和 M' 中各自一条边相关联，H 的每个连通分支或是一个边交错地属于 M 与 M' 的长度为偶数的圈，或是一条边交错地属于 M 与 M' 的路. 由于 $|M'|>|M|$，H 中至少有一个连通分支 P，它所包含的属于 M' 的边比属于 M 的边多. 显然这个分支不可能是圈，而只能是一条路，而且是一条两端均为 M 非饱和点的 M 交错路，矛盾. □

习　题

5.1.1　证明任何树至多有一个完美匹配.

5.1.2　证明每一个 k 方体（参阅习题 1.2.9）有完美匹配.

5.1.3　设 k 为大于 1 的奇数，举出没有完美匹配的 k 正则简单图的例

子。

5.1.4 设k为大于零的偶数，举出有完美匹配的k正则简单图的例子。

5.1.5 两人在图G上对奕，双方分别执黑子与白子，轮流向G的不同顶点$v_0, v_1, v_2, \cdots$下子，要求当$i>0$时v_i与v_{i-1}相邻，并规定最后可下子的一方获胜。若规定执黑子者先下子，试证明执黑子的一方有取胜策略的充分必要条件是G无完美匹配。

5.1.6 G的一个k正则支撑子图称为G的一个**k因子**。若存在两两无公共边的k因子$H_1, H_2, \cdots, H_n$，使得$G=H_1 \cup H_2 \cdots \cup H_n$，则称$G$**可$k$因子分解**。显然，$G$的1因子就是$G$的完美匹配；若$G$可$k$因子分解，则$G$必为正则图。证明

(a) 每个2正则图为可1因子分解的充分必要条件是图中不包含奇圈；

(b) 彼得森图不可1因子分解。

5.2 二部图中的匹配与覆盖

设G是一个二部图，其顶点集的二分划为(X, Y)。在实际应用中，有时希望求出G的一个饱和X中的每一个顶点的匹配。例如：设某单位有n名工作人员$x_1, x_2, \cdots, x_n$和m项工作$y_1, y_2, \cdots, y_m$，能否给每个人恰好分配一项他胜任的工作，且每项工作至多分配给一名胜任该项工作的人员？这个问题称为人员分配问题。人员分配问题也可用图的语言予以表述。令$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$。构造二部图$G$如下：其顶点集的二分划为$(X, Y)$；对于$1 \leqslant i \leqslant n$，$1 \leqslant j \leqslant m$，当且仅当人员$x_i$胜任工作$y_j$时，$G$中存在连接顶点$x_i$与$y_j$的边。于是人员分配问题就成为在$G$中求一个饱和$X$中每个顶点的匹配的问题。下面的霍尔定理(P. Hall, 1935)给出了一个图中存在这种匹配的充分必要条件。为了方便起见，我们先引进一个记号。设S是图G的顶点集的任何一个子集，我们用$N_G(S)$，或者在不致引起混淆时用$N(S)$表示G中与S中的顶点相邻的顶点的集合。

定理 5.2(霍尔定理) 设二部图G的顶点集的二分划为(X, Y)。G有饱和X中每个顶点的匹配的充分必要条件是，对于任何$S\subseteq X$, $N_G(S)\geqslant|S|$。

证 **必要性** 设M是G的一个饱和X中每一个顶点的匹配，且$S\subseteq X$。因为S中的每个顶点在$N_G(S)$中有一个在M中与之相匹配的顶点，而且由匹配的定义知，与S中不同的顶点相匹配的顶点是不相同的，所以$|N_G(S)|\geqslant|S|$。

充分性 设M^*是G的一个最大匹配，但在X中存在M^*非饱和点。设u是X中的一个M^*非饱和点，Z是G中通过M^*交错路与u相连接的顶点的集合，并约定$u\in Z$。令$S=X\cap Z, T=Y\cap Z$。因为M^*是最大匹配，G中不存在两端均为M^*非饱和点的M^*交错路，所以除u之外，Z中的每个顶点都是M^*饱和的，而且$Z\backslash\{u\}$中的顶点在M^*中两两互相匹配。因此$|S\backslash\{u\}|=|T|$，即

$$|S|-1=|T| \tag{5.1}$$

现在我们来证明$T=N_G(S)$。由于对任何$v\in T$，G中有一条由u到v的M^*交错路P，而G又是二部图，在P上与v相邻的一点必是S中的顶点，从而必有$v\in N_G(S)$。反之，设$v\in N_G(S)$。由于G是二部图，为了证明$v\in T$，只需证明$v\in Z$。设S中与v相邻的顶点为w，而P是由u到w的一条M^*交错路。若v在P上，则P上由u到v的那一段是一条由u到v的M^*交错路，从而$v\in Z$；否则，因P的长度为偶数，其最后一条边为M^*中的边，从而$wv\notin M^*$，所以$P\cup\{wv\}$是一条由u到v的M^*交错路，即也有$v\in Z$。总之，对任何$v\in N_G(S)$都有$v\in T$。于是$T=N_G(S)$。

最后，由$T=N_G(S)$与(5.1)式得

$$|N_G(S)|=|T|=|S|-1<|S|$$

与假设矛盾。□

上面的霍尔定理又称为婚配定理。按照这种称谓，X、Y被分

别解释为若干女青年和男青年的集合，一对男女青年如果相识，则在相应的一对顶点之间连接一条边．于是霍尔定理给出了每一位女青年都能够与一位相识的男青年婚配的充分必要条件．

霍尔定理还可以表述为一个关于所谓集合族的相异代表集的结果．设$\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$是某个集合$W$的一个子集族．若集合$S=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$满足$v_i\in A_i$，且对于$i\neq j$总有$v_i\neq v_j$ $(1\leqslant i,j\leqslant m)$，则称$S$为$\mathscr{A}$的一个相异代表集．这种称谓的直观含义是十分明显的，那就是：$v_i\in A_i$表示v_i是A_i的代表，而$v_i\neq v_j$表示不同的A_i与A_j具有不同的代表．一个自然的问题是：怎样的$\mathscr{A}$具有相异代表集？我们可以通过构造一个二部图把这个问题化为图论中的问题．令$X=\mathscr{A}$，$Y=W$，G是一个二部图，其顶点集的二分划为(X,Y)，$A_i\in X$与$v\in Y$在G中相邻，当且仅当$v\in A_i$．显然，$\mathscr{A}$具有相异代表集的充分必要条件是G中存在饱和X中每个顶点的匹配．于是我们得到下列推论，它可以看作霍尔定理的另一种表述形式．

推论 5.3 集合族具有相异代表集的充分必要条件是，对于每个$I\subseteq\{1,2,\cdots,m\}$，

$$\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right|\geqslant|I| \quad \square$$

将霍尔定理应用于正则二部图，我们还得到下列推论．

推论 5.4 设G是k正则二部图，$k>0$，则G有完美匹配．

证 设G的顶点集的二分划为(X,Y)．因G是k正则的且$k>0$，我们有$k|X|=|E|=k|Y|$，从而$|X|=|Y|$．对任何$S\subseteq X$，设E_1是与S中的顶点相关联的边的集合，而E_2是与$N_G(S)$中的顶点相关联的边的集合．由E_1与E_2的定义知，$E_1\subseteq E_2$，于是

$$k|N_G(S)|=|E_2|\geqslant|E_1|=k|S|$$

从而$|N_G(S)|\geqslant|S|$．根据霍尔定理，G中有饱和X中每一顶点

的匹配，设此匹配为M． 又因$|X|=|Y|$，M也饱和Y中每一顶点，即M是G的一个完美匹配．□

图G的一个**覆盖**是指G的顶点集的一个子集，它包含G的每一条边的至少一个端点．顶点数最少的覆盖称为最小覆盖．因为包含某一个覆盖的任何顶点集合也是一个覆盖，所以通常只对图的最小覆盖感兴趣．

对同一个图来说，其覆盖与匹配之间存在着一定的关系．设K是图G的一个覆盖，M是G的一个匹配．因为K包含M中每一条边的至少一个端点，而M中任何两条边又不可能有共同的端点，我们有$|M|\leqslant|K|$．特别地，对于最大匹配M^*与最小覆盖$\tilde{K}$有$|M^*|\leqslant|\tilde{K}|$．一般来说，上式中的等号并不成立． 例如，当$G$是一个长度为$2n+1$的圈时，$|M^*|=n$，而$|\tilde{K}|=n+1$． 这个例子虽然简单，却很有代表性．实际上对于任何二部图，亦即任何不包含奇圈的图，确实有$|M^*|=|\tilde{K}|$．为了证明这一点，我们先证明一个简单的引理．

引理 5.5 设M为匹配，K为覆盖．若$|M|=|K|$，则M是最大匹配，K是最小覆盖．

证 设M^*与$\tilde{K}$分别是最大匹配与最小覆盖．于是

$$|M|\leqslant|M^*|\leqslant|\tilde{K}|\leqslant|K|$$

又因为$|M|=|K|$，所以$|M|=|M^*|=|\tilde{K}|=|K|$，即$M$是最大匹配，$K$是最小覆盖．

定理 5.6(柯尼希，D. König，1931) 若G是二部图，则G的最大匹配的边数与最小覆盖的顶点数相等．

证 设G的顶点集的二分划为(X,Y)． 设M^*是G的一个最大匹配，U是X中的M^*非饱和点的集合． 以Z表示G中与U中顶点有M^*交错路相连接的顶点的集合，同时约定$U\subseteq Z$． 令$S=X\cap Z$，$T=Y\cap Z$． 与霍尔定理证明中的有关论证相似，由Z的定义及G的二部性可知$T=N_G(S)$． 因此G中不存在一端属

于 S 而另一端属于 $Y\backslash T$ 的边，即 G 中任一边至少有一个端点属于 T 或 $X\backslash S$。从而 $\tilde{K}=T\cup(X\backslash S)$ 是 G 的一个覆盖（参看图 5.2）。

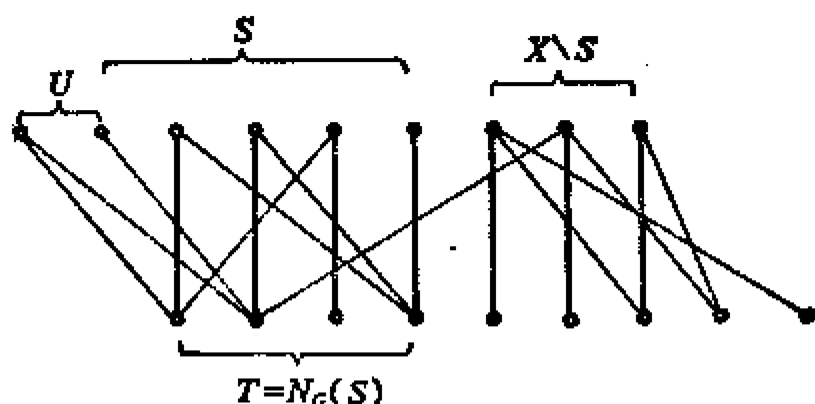


图 5.2

显然，$|M^*|=|X\backslash U|=|S\backslash U|+|X\backslash S|$。又因 $S\backslash U$ 中的顶点与 T 中的顶点在 M^* 中是两两匹配的，所以 $|S\backslash U|=|T|$，从而

$$|M^*|=|T|+|X\backslash S|=|\tilde{K}|$$

再由引理 5.5 即可知 $\tilde{K}$ 是最小覆盖。这就证明了在 G 中最大匹配的边数等于最小覆盖的顶点数。□

例 (0,1)矩阵是指以 0 或 1 为其元素的矩阵。设 A 是一个 $n\times m$ 的(0,1)矩阵。A 的一行或一列称为一条线。试证明，两两不属于同一条线的 1 的个数的最大值等于包含 A 中所有的 1 的线数的最小值。

为证明这一结论，我们构造一个二部图 G，其顶点集的二分划为 (X,Y)。我们以 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 表示 A 的行的集合，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$ 表示 A 的列的集合；x_i 与 x_j 之间有一条边，当且仅当位于第 i 行第 j 列的元素等于 1。显然，A 中两两不属于同一条线的 1 的集合对应于 G 中的匹配，而包含 A 中全部 1 的线的集合对应于 G 中的覆盖。由定理 5.6 立即得知例中的结论成立。

习　题

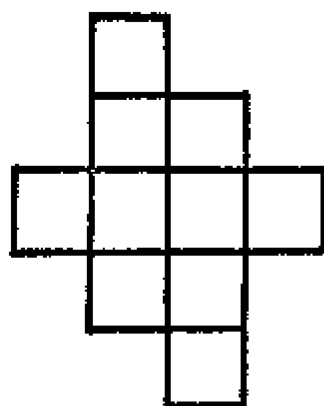


图 5.3

5.2.1　能否用 5 个 1×2 的长方形将图中的 10 个 1×1 正方形完全遮盖住？

5.2.2　设 G 是二部图，其顶点集的二分划为 (X,Y)。证明：若对于任何 $x\in X$ 与 $y\in Y$ 均有 $d_G(x)\geqslant d_G(y)$，则 G 有饱和 X 中每一顶点的匹配。

5.2.3　证明二部图 G 有完美匹配的充分必要条件是对于任何 $S\subseteq V(G)$，$|N_G(S)|\geqslant|S|$ 成立。举例说明若 G 不是二部图则上述条件是不充分的。

5.2.4　对于任何正整数 k，证明

（a）任何 k 正则二部图是可 1 因子分解的。

（b）任何 $2k$ 正则图是可 2 因子分解的。

（提示：可设所给 $2k$ 正则图 G 是连通的且 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots v_\nu\}$，由之 G 是欧拉图，设 C 是 G 的一个欧拉闭迹．构作二部图 G'，其顶点集的二分划为 (X,Y)，$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_\nu\}$，$Y=\{y_1,y_2\cdots,y_\nu\}$，$x_i$ 与 y_j 相邻当且仅当沿 C 有一条由 v_i 到 v_j 的边。注意 G' 中的一个 1 因子对应于 G 中的一个 2 因子．）

5.2.5　一个 $m\times n$ 拉丁矩是指一个 $m\times n$ 矩阵 $M=(m_{ij})$，其元素为满足 $1\leqslant m_{ij}\leqslant n$ 的整数，且属于任何同一行或列的任意两个元素不相等。由定义知 $m\leqslant n$。当 $m=n$ 时称拉丁矩为拉丁方。证明：若 $m<n$ 且 M 是一个 $m\times n$ 拉丁矩，则可增加 $n-m$ 个新的行使 M 扩充为一个拉丁方。

5.2.6　用柯尼希定理(5.6)证明霍尔定理(5.2)。

5.2.7　证明霍尔定理的下述推广：在以 (X,Y) 为二分划的二部图中，最大匹配所含的边数等于

$$\min_{S\subseteq X}(|X\backslash S|+|N(S)|)$$

5.2.8　设 G 为二部图，其顶点集的二分划为 (X,Y)。证明：若 G 中有饱和 X 的每一顶点的匹配，则存在 $x\in X$，使得对于任何 $y\in N(x)$，边 xy 属于 G 中的某一个最大匹配．（提示：可对 $|X|$ 施行数学归纳法。以 S 表示 X 的非

空真子集并区分以下两种情形：（a）对任何S均有$|N(S)|>|S|$；（b）存在S使得$|N(S)|=|S|$。）

5.3 完美匹配

前面已经指出，对于图的匹配，我们感兴趣的是最大匹配或完美匹配．于是，怎样刻划具有完美匹配的图就是一个很自然的问题．下面的定理回答了这个问题．为方便起见，我们称具有奇数（偶数）个顶点的连通分支为**奇（偶）分支**，并以$o(G)$表示表示图G的奇分支的个数．

定理 5.7（塔特，W. Tutte，1947） 图G有完美匹配的充分必要条件是，对于任意的$S\subset V(G)$，

$$o(G-S)\leqslant|S| \tag{5.2}$$

证 必要性 设M是G的一个完美匹配，C是$G-S$的任意一个连通分支．由于M是完美匹配，G的每一个顶点恰与另一个顶点在M中相匹配．显然，同属于C的在M中互相匹配的顶点的个数为偶数．因此，若C是奇分支，则C中至少有一个顶点v与一个不属于C的顶点v'相匹配，而且由于C是$G-S$的一个连通分支，v'只能属于S．考虑到M中的边是互不相邻的，即得$o(G-S)\leqslant|S|$．

充分性 对$|V(G)|$作数学归纳法．当$|V(G)|$为奇数时，若令$S=\varnothing$，则$o(G-S)\geqslant1>0=|S|$，即(5.2)不成立．故由条件(5.2)知$|V(G)|$必为偶数．显然，当$|V(G)|=2$时，由(5.2)可推出G有完美匹配．现假设$|V(G)|=n>2$，并假定一切阶小于n且满足(5.2)的图有完美匹配，欲证G有完美匹配．

首先证明，存在$S\subset V(G)$使(5.2)中的等号成立．设v为G的任一顶点，令$S=\{v\}$，于是$G-S$是奇阶的，因而$o(G-S)\geqslant1=|S|$，再由(5.2)可知$o(G-S)=|S|$．这就证明了使得(5.2)式中的等号成立的S确实存在．

其次，设S_0是使得(5.2)式中等号成立的且顶点最多的S。设$C_1,C_2,\cdots,C_l,l=|S_0|$，是$G-S_0$的奇分支，而且当$G-S_0$存在偶分支时，设$D_1,D_2,\cdots,D_m$是$G-S_0$的全部偶分支。

(1) 对于每个$1\leqslant j\leqslant m$，D_j有完美匹配。事实上，设$S\subset V(D_j)$，我们有

$$o(G-S_0)+o(D_j-S)=o(G-S_0\cup S)$$
$$\leqslant|S_0\cup S|=|S_0|+|S|$$

再由$o(G-S_0)=|S_0|$即得$o(D_j-S)\leqslant|S|$。根据归纳假设，D_j有完美匹配。

(2) 对于每个C_i和每个$c\in V(C_i)$，C_i-c有完美匹配，$1\leqslant i\leqslant l$。假设不然，根据归纳假设，必有$S\subset V(C_i-c)$使得

$$o(C_i-c-S)>|S|$$

因$|V(C_i-c)|$是偶数，$|V(C_i-c)\backslash S|$与$|S|$有相同的奇偶性，而$o(C_i-c-S)$与$|V(C_i-c)\backslash S|$又具有相同的奇偶性，由此进一步得到

$$o(C_i-c-S)\geqslant|S|+2$$

于是

$$|S_0|+1+|S|=|S_0\cup\{c\}\cup S|\geqslant o(G-S_0\cup\{c\}\cup S)$$
$$=o(G-S_0)-1+o(C_i-c-S)\geqslant|S_0|+1+|S|$$

这表明集合$S_0\cup\{c\}\cup S$也使得(5.2)式中的等号成立，从而与S_0的最大性相矛盾。

(3) G包含l条形如s_ic_i的互不相邻的边，其中$s_i\in S_0$，$c_i\in C_i$，$i=1,2,\cdots,l$。为证明这断语，我们构造一个二部图$H=H(X,Y)$，其顶点集的二分划为(X,Y)，$X=(C_1,C_2,\cdots,C_l)$，$Y=S_0$，而C_i与$s\in S_0$相邻，当且仅当G中有一条连接s与C_i中某个顶点的边。于是上述断语是否成立就取决于在H中是否存在饱和X中的每个顶点的匹配，而对后一个问题我们可以应用霍尔定理。设$S\subseteq X$，令$S'=N_H(S)$。根据图H与图G的关系，显然有

$$|S| \leqslant o(G-S') \tag{5.3}$$

而由条件(5.2)知，对任何$S' \subset V(G)$均有

$$o(G-S') \leqslant |S'| = |N_H(S)| \tag{5.4}$$

综合(5.3)与(5.4)即得$|S| \leqslant N_H(S)$．因此，图H满足霍尔定理所给出的条件，从而包含饱和X中每个顶点的匹配．

最后，将上面各项结合起来，我们就可以完成对充分性的证明．实际上，设M_1为(3)中已证明其存在性的形如$s_i c_i$的l条互不相邻的边的集合．由(2)知，每个$C_i - c_i$有一个完美匹配M_{2i}；令$M_2 = \bigcup_{i=1}^{l} M_{2i}$．由(1)知，每个$D_j$有一个完美匹配$M_{3j}$．令$M_3 = \bigcup_{j=1}^{m} M_{3j}$．显然，$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$是$G$的一个完美匹配．□

推论5.8　图G包含一个至多有d个M非饱和点的匹配M，当且仅当对任何$S \subset V(G)$，

$$o(G-S) \leqslant |S| + d \tag{5.5}$$

证　设M是G的任一匹配，由于G中的M饱和点的个数为偶数，G中的M非饱和点的个数必与$|V(G)|$具有相同的奇偶性．因此我们可以假设

$$d \equiv |V(G)| \pmod{2}$$

令$H = G \vee K_d$，即令H是一个从G出发按如下方式得到的图：另加一个d阶完全图K_d，并在K_d的每个顶点与G的每个顶点之间连接一条边．显然，G包含一个至多有d个M非饱和点的匹配M，当且仅当H包含一个完美匹配．由定理5.7知，H包含一个完美匹配等价于：对任何$S' \subset V(H)$，

$$o(H-S') \leqslant |S'| \tag{5.6}$$

因此，为证明定理成立，只需证明(5.5)式与(5.6)式等价．

设(5.6)式成立且$S \subset V(G)$，并令$S' = S \cup V(K_d)$．于是

$$o(G-S)=o(H-S')\leqslant|S'|=|S|+d$$

即(5.5)式成立。

反之，设(5.5)式成立且$S'\subset V(H)$．由$d\equiv|V(G)|(\mathrm{mod}.2)$知$|V(H)|\equiv 0\ (\mathrm{mod}.2)$．这表明当$S'=\varnothing$时(5.6)式成立．因此设$S'\neq\varnothing$．若$V(K_d)\backslash S'\neq\varnothing$，则$H-S'$是连通的，故$o(H-S')\leqslant 1\leqslant|S'|$，从而(5.6)式成立．若$V(K_d)\backslash S'=\varnothing$，即$V(K_d)\subset S'$，则令$S=S'\backslash V(K_d)$．此时我们有

$$o(H-S')=o(G-(S'\backslash V(K_d)))=o(G-S)\leqslant|S|+d$$
$$=|S'|$$

即(5.6)式也成立．□

推论5.9　每个$(k-1)$边连通的k正则图有完美匹配．

证　设G是一个$(k-1)$边连通的k正则图，S是G的一个真子集且$o(G-S)=n$．以C_i表示$G-S$的奇分支，并假定C_i与S之间恰有m_i条边，$1\leqslant i\leqslant n$．因为G是$(k-1)$边连通的，我们有$m_i\geqslant k-1$．另一方面，由于G是k正则的，我们有

$$m_i=\sum_{v\in V(C_i)}d(v)-2\varepsilon(C_i)$$
$$=k\nu(C_i)-2\varepsilon(C_i)$$

因$\nu(C_i)$是奇数，而$2\varepsilon(C_i)$是偶数，所以m_i与k具有相同的奇偶性．由此即进一步得到

$$m_i\geqslant k$$

对一切$1\leqslant i\leqslant n$成立．于是

$$o((G-S)=n\leqslant\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}m_i\leqslant\frac{1}{k}\sum_{v\in S}d(v)=|S|$$

由定理5.7立即可知G有完美匹配．□

习　题

5.3.1　设G是树．证明G有完美匹配，当且仅当对任何$v\in V(G)$，$o(G)=1$．(提示：在证明条件的充分性时，对任何$v\in V(G)$，可设$\varphi(v)$为$G-v$的

奇分支中的一个顶点，它在G中与v相邻，不难证明$\varphi(v)$唯一存在，且$\varphi(\varphi(v))=v$.）

5.3.2 设G是偶阶连通图．证明：若G不包含爪（即$K_{1,3}$不是G的顶点导出子图），则G有完美匹配．

5.3.3 用塔特定理(5.7)证明霍尔定理(5.2)．（提示：设G是以(X,Y)为顶点集的二分划的二部图．构造G的母图H，使得当且仅当H有完美匹配时，G有饱和X中的每一顶点的匹配.）

5.4 求解人员分配问题的算法

在5.2节中我们介绍了人员分配问题及其存在解的充分必要条件（霍尔定理）．在实际应用中，我们自然不会满足于此，而是进一步希望找到一种便于运用的算法，这种算法应该满足如下的要求：当问题存在解时，它至少求出一个解，当问题不存在解时，它根据给定的图G及顶点集的二分划(X,Y)找到一个$S\subset X$，使得$|N_G(S)|<|S|$．下面要介绍的就是一个满足这种要求的算法，通常称之为匈牙利方法．匈牙利方法可归结为从图中的任何一个匹配M（例如可以是图中的任何一条边）出发，然后施行以下步骤：

(1) 考察M是否饱和X中的每个顶点．如果是，则算法终止（M是问题的一个解）．否则，设u是X中的一个M非饱和点．令$S:=\{u\}$，$T:=\varnothing$．

(2) 考察$N_G(S)\backslash T$是否是空集．如果是，则因$|T|=|S|-1$而得到$|N_G(S)|<|S|$，算法终止（问题无解）．否则任取$y\in N_G(S)\backslash T$．

(3) 考察y是否是M饱和的．若是则设$yz\in M$，令$S:=S\cup\{z\}$，$T:=T\cup\{y\}$．转向第(2)步．否则，得到一条连接M非饱和点u和y的M交错路P，令$M:=M\triangle E(P)$，转向第(1)步．

根据对上述各步骤的分析可以看出，匈牙利方法的核心是：对于已知的匹配M，从任一选定的M非饱和点u出发，通过逐步扩

大S与T在图中搜寻由u到另一M非饱和点的M交错路．由于在算法终止之前，S和T是不断逐步扩大的，这一方法保证了：只要图中存在这样的交错路，就一定能找到一条这样的交错路，并根据它求得一个边数更多的匹配，而当图中不存在这种交错路时，必有$N_G(S)=T$，从而得到一个S满足$|N_G(S)|<|S|$．现在我们来看一个具体例子．对图5.4所表示的二部图G，我们首先令$M=\{x_1y_1\}$，然后从M出发执行算法的各个步骤．

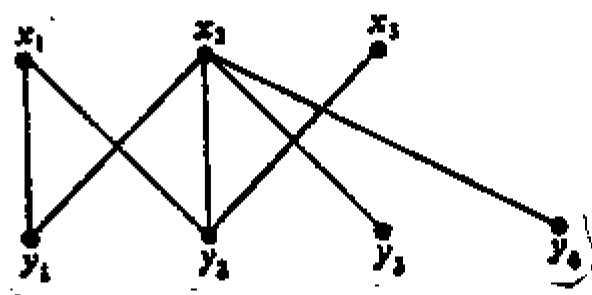


图 5.4

(1) X中存在M非饱和点，令$S:=\{x_2\}$，$T:=\varnothing$，转(2)．

(2) $N_G(S)\backslash T=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}\neq\varnothing$．取$y_2\in N_G(S)\backslash T$，转(3)．

(3) y_2是M非饱和的．得到由x_2到y_2的M交错路$P=x_2y_2$．
令$M:=M\triangle E(P)=\{x_1y_1,x_2y_2\}$，转(1)．

(1) X中存在M非饱和点，令$S:=\{x_3\}$，$T:=\varnothing$，转(2)．

(2) $N_G(S)\backslash T=\{y_2\}$．取$y_2\in N_G(S)\backslash T$，转(3)．

(3) y_2是M饱和的，$y_2x_2\in M$．令$S:=S\cup\{x_2\}=\{x_2,x_3\}$，
$T:=T\cup\{y_2\}=\{y_2\}$，转(2)．

(2) $N_G(S)\backslash T=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}\backslash\{y_2\}=\{y_1,y_3,y_4\}$，取$y_1\in N_G(S)\backslash T$，转(3)．

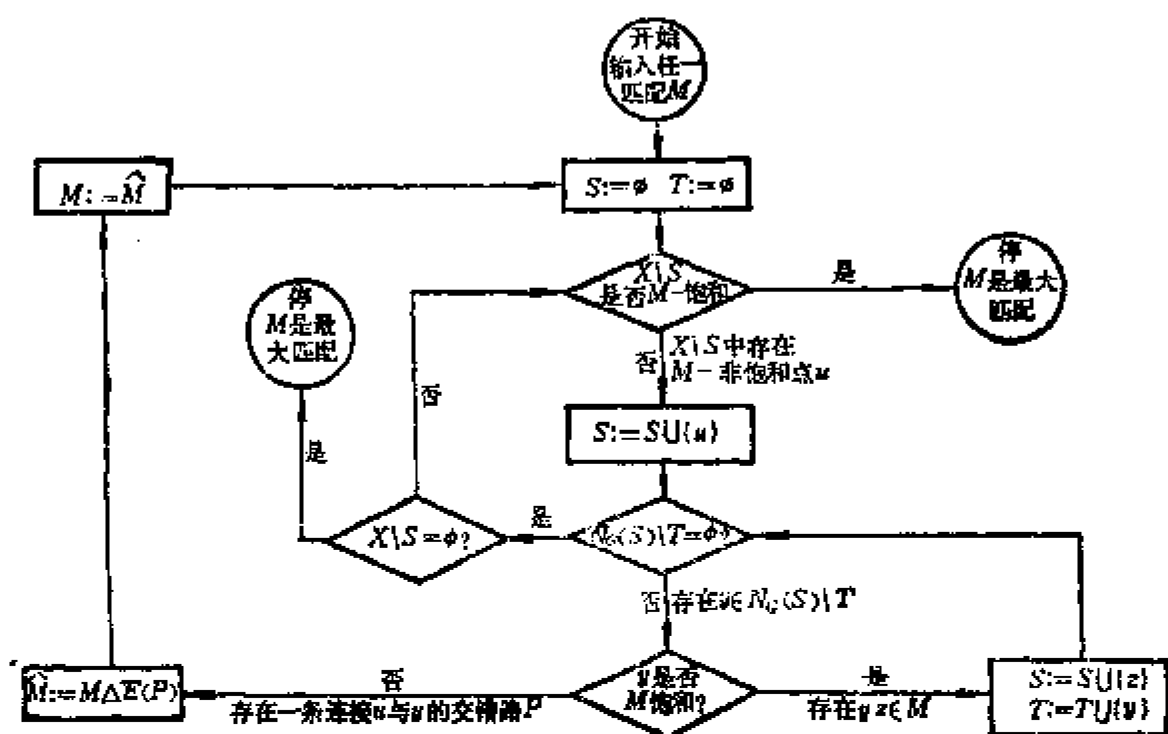
(3) y_1是M饱和的．$y_1x_1\in M$．令$S:=S\cup\{x_1\}=\{x_1,x_2,x_3\}$，$T:=T\cup\{y_1\}=\{y_1,y_2\}$，转向(2)．

(2) $N(S)\backslash T=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}\backslash\{y_1,y_2\}=\{y_3,y_4\}$，取$y_3\in N(S)\backslash T$，转(3)．

(3) y_3 是 M 非饱和的，得到由 x_3 到 y_3 的 M 交错路 $P=x_3y_2x_2y_3$. 令$M:=M\triangle E(P)=\{x_1y_1, x_2y_3, x_3y_2\}$,转(1).

(1) M饱和X中的每一个顶点. 终止.

在掌握匈牙利方法的基本思想后，我们可以对上面的算法稍做修改,使之能够用来求二部图中的最大匹配. 下面就是一个用框图表示的求二部图的最大匹配的算法，它与前面那个算法的差别在于.它能求出一切两端均为M非饱和点的M交错路.



参 考 文 献

Berge, C. (1957). Two theorems in graph theory. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 43,842—44

Hall, P. (1935). On representatives of subsets. J. London Math. Soc., 10,26—30

Köaig, D. (1931). Graphen und matrizen. Mat. Fiz. Lapok,38,116—119

Tutte, W. (1974). The factorization of linear graphs. J. London Math. Soc., 22,107—111

第六章　独立集和团

由于本章的内容极易从简单图推广到一般的图，因此这一章所考虑的图均假定为简单图．

6.1　独立集和覆盖

设 $S\subseteq V(G)$．若 S 中任意两个顶点在图 G 中都不相邻，亦即 $G[S]$ 是空图，则称 S 是 G 的一个点独立集，或简称为独立集．如果 S 是独立集，且 G 中没有基数大于 $|S|$ 的独立集，则称 S 是 G 的最大独立集．G 的最大独立集的基数叫做 G 的独立数，记为 $\alpha(G)$．例如 $\{v,y\}$ 是图 6.1 中的图的独立集，但不是最大独立集．$\{u,w,t\}$ 是这个图的最大独立集，因此这个图的独立数 $\alpha=3$．

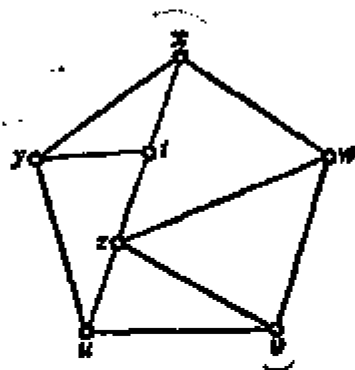


图 6.1

对于一个图的边集来说，与点独立集相应的概念是边独立集，即两两不相邻的边的集合，也就是第五章中定义的匹配．图 G 的最大边独立集的基数（即 G 中最大匹配的边数）叫做 G 的边独立数，记为 $\alpha'(G)$．例如 $\{uv,xw\}$ 是图 6.1 中的图的边独立集，但不是最大边独立集，而 $\{uv,xw,yt\}$ 及 $\{uy,tz,xw\}$ 都是该图的最大边独立集．因此这个图的边独立数 $\alpha'=3$．

例 1　设 E_n、K_n、$K_{m,n}$、C_n、P_n 分别表示 n 阶空图、n 阶完全图、$m+n$ 阶完全 2 部图、长为 n 的圈和路，则

$$\alpha(E_n)=n,\qquad\qquad \alpha'(E_n)=0$$

$\alpha(K_n)=1,\qquad \alpha'(K_n)=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

$\alpha(K_{m,n})=\max\{m,n\},\qquad \alpha'(K_{m,n})=\min\{m,n\}$

$\alpha(C_n)=\alpha'(C_n)=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

$\alpha(P_n)=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+1,\qquad \alpha'(P_n)=\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$

在 5.2 节中我们给出了图 G 的覆盖和最小覆盖的定义．最小覆盖的基数(即其中顶点的个数)称为图 G 的覆盖数，记为 $\beta(G)$．对于图 6.1 中的图，$\{y,x,v,z\}$ 是最小覆盖，因此这个图的覆盖数 $\beta=4$．

设 $L\subseteq E(G)$，如果 G 的每个顶点都是 L 中某条边的端点，则称 L 是 G 的一个边覆盖，也叫做 L 覆盖了 G．基数最小的边覆盖叫做这个图的最小边覆盖，G 的最小边覆盖的边数叫做 G 的边覆盖数，记为 $\beta'(G)$．例如 $\{uv,vw,wx,yt,zw\}$ 是图 6.1 中的图的边覆盖，但不是最小边覆盖，$\{uv,wx,yt,zw\}$ 是最小边覆盖，因此这个图的边覆盖数 $\beta'=4$．显然一个图有边覆盖的充分必要条件是它没有孤立点．第五章中所说的一个图的完美匹配既是这个图的最大边独立集，也是这个图的最小边覆盖．

例 2 $\beta(E_n)=0,\qquad \beta'(E_n)$ 没有意义

$\beta(K_n)=n-1,\qquad \beta'(K_n)=\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

$\beta(K_{m,n})=\min\{m,n\},\qquad \beta'(K_{m,n})=\max\{m,n\}$

$\beta(C_n)=\beta'(C_n)=\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

$\beta(P_n)=\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor,\qquad \beta'(P_n)=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+1$

定理 6.1 设 $S\subset V=V(G)$，则 S 是 G 的独立集的充分必要条件为 $V\backslash S$ 是 G 的覆盖．

证　**必要性**　假如S是G的独立集，则G的任何一条边都至少有一个端点是$V\backslash S$中的顶点，故$V\backslash S$是G的覆盖。

充分性　假如$V\backslash S$是G的覆盖，即G的任何一条边都至少有一个端点是$V\backslash S$中的顶点，从而不存在两个端点都是S中的顶点的边，故S是G的独立集。□

定理 6.2　任意一个图G的独立数与覆盖数之和等于图的阶，即

$$\alpha(G)+\beta(G)=\nu \tag{6.1}$$

证　设S是G的一个最大独立集，$|S|=\alpha(G)$。由定理 6.1 可知$V(G)\backslash S$是G的覆盖。只需证明$V(G)\backslash S$是G的最小覆盖。事实上，假如$V(G)\backslash S$不是最小覆盖，就应当有一个基数比$|V(G)\backslash S|=\nu-|S|$还小的覆盖，这个覆盖的补集的基数就应比$|S|$大，而由定理 6.1 知这个补集也是$G$的独立集，这与$S$是$G$的最大独立集矛盾。故$V(G)\backslash S$是$G$的最小覆盖，即$|V(G)\backslash S|=\beta(G)$，于是

$$\alpha(G)+\beta(G)=|S|+|V(G)\backslash S|=|S|+\nu-|S|=\nu \quad \square$$

定理 6.2 的证明基于定理 6.1，即一个图的点覆盖的补集是独立集，独立集的补集是点覆盖。我们可以更抽象地理解定理6.1和定理 6.2 的关系。设有一个集合U，A是U的子集，P、Q是这样两个性质：当集合A有性质P时，A在U中的补集就有性质Q；反之，当集合A有性质Q时，A在U中的补集就有性质P。那么，具有性质P的一切集合的最大基数与具有性质Q的一切集合的最小基数之和等于U的基数。

边独立集与边覆盖之间并不存在类似于定理 6.1 中的关系。例如在长为 3 的路P_3中，两端的两条边组成了边独立集，而它的补集只有P_3中间的一条边，它并不成为P_3的边覆盖。又如K_4中任意两条没有公共顶点的边组成了边覆盖，其补集有 4 条边，并不是K_4的边独立集。可是匈牙利数学家加莱(T. Gallai)证明了边

独立数与边覆盖数之间仍然存在着类似于(6.1)的简单关系。

定理 6.3 若G没有孤立点，则

$$\alpha'(G)+\beta'(G)=\nu \tag{6.2}$$

证 由定义可以看出，每个最小边覆盖L必不包含圈。事实上，如果L中有圈，从L中去掉任一条边之后，余下的边集仍然是边覆盖。这与L是最小边覆盖矛盾。因此L是一个林。又边导出子图$G[L]$的每个分支的直径不超过2。这是因为若$G[L]$中有长度大于2的路，去掉路上任一条与路的端点不关联的边，余下的边仍构成边覆盖，这与L为最小边覆盖矛盾。所以$G[L]$的每个连通分支是一个$K_{1,n}$(通常称为星)。令$G[L]$的分支数为k，由于星的顶点数比边数大1，从而有

$$\nu=|V(G)|=|L|+k=\beta'(G)+k \tag{6.3}$$

从$L(G)$的每个连通分支任选一条边，这样得到的k条边显然组成边独立集，因此$\alpha'(G)\geqslant k$，于是由(6.3)可得

$$\alpha'(G)+\beta'(G)\geqslant\nu \tag{6.4}$$

再假定$\tilde{L}$是一最大边独立集，它有$2\alpha'(G)$个顶点，因此G中还有$\nu-2\alpha'(G)$个顶点未被$\tilde{L}$饱和。因为G中没有孤立顶点，这$\nu-2\alpha'(G)$个顶点中的每个顶点都至少是$E(G)$中某一条边的端点。对每一个顶点取定这样一条边，由于$\tilde{L}$是最大边独立集，这样取定的边互不相同。这些边与$\tilde{L}$合在一起覆盖了G，其边数总共为$[\nu-2\alpha'(G)]+\alpha'(G)=\nu-\alpha'(G)$，由最小边覆盖的定义得出$\beta'(G)\leqslant\nu-\alpha'(G)$，即

$$\alpha'(G)+\beta'(G)\leqslant\nu \tag{6.5}$$

联合(6.4)与(6.5)立刻得出(6.2)。□

由(6.3)和(6.2)还可以得到

推论 6.4 对于没有孤立点的图G，任一最小边覆盖的边导出子图的连通分支数是一个常数，它等于G的边独立数$\alpha'(G)$。

除了(6.1)、(6.2)外，再进一步看一看图的点和边的独立数与

覆盖数之间还有什么其它的关系．5.2节中曾证明图G的最大匹配M^*与最小覆盖$\tilde{K}$满足$|M^*|\leqslant|\tilde{K}|$．由于最大匹配就是最大边独立集，因此上述不等式可以表示为

$$\alpha'(G)\leqslant\beta(G) \tag{6.6}$$

柯尼希定理（定理5.6）告诉我们，如果G是二部图，则(6.6)中的等号成立，即

$$\alpha'(G)=\beta(G) \tag{6.7}$$

第五章中用交错路概念来证明柯尼希定理，以下借助于独立集概念和霍尔定理（定理5.2），给出柯尼希定理的另一个证明．

定理 6.5（柯尼希定理） 设$G=G(X,Y)$是二部图，则

$$\alpha'(G)=\beta(G)$$

证 设Z是G的一个最大独立集，$\bar{Z}$是它的补集，于是$|Z|=\alpha(G)$，$|\bar{Z}|=\nu-\alpha(G)=\beta(G)$．由于$Z$是独立集，故$Z\cap X$的顶点与$Z\cap Y$的顶点间没有边连接．又因$(X,Y)$是$G$的二分划，$Z\cap X$与$\bar{Z}\cap X$及$Z\cap Y$与$\bar{Z}\cap Y$之间以及它们各自的内部也没有边相连（参看图6.2）．

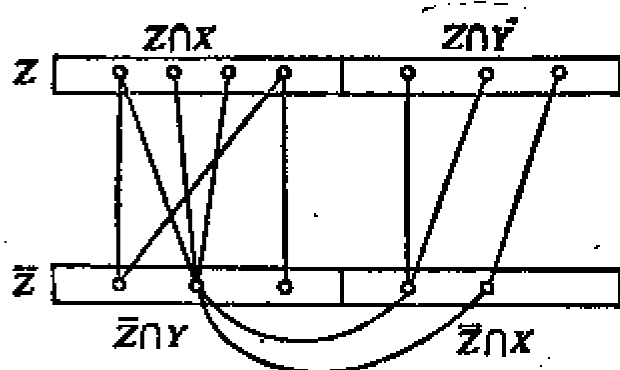


图 6.2

首先证明有由连接$Z\cap X$和$\bar{Z}\cap Y$的边组成的且使$\bar{Z}\cap Y$中每一个点都饱和的匹配．事实上，由霍尔定理5.2，只需证明对于任意顶点集$S\subseteq\bar{Z}\cap Y$都有$|N(S)\cap Z\cap X|\geqslant|S|$．因若有$S_0\subseteq\bar{Z}\cap Y$，而$|N(S_0)\cap Z\cap X|<|S_0|$，那么顶点集$[Z\backslash(N(S_0)$

$\cap Z\cap X)]\cup S$。显然是比Z的基数还大的独立集，导致矛盾．同理可知存在由连接$\bar{Z}\cap X$和$Z\cap Y$的边组成的且使$\bar{Z}\cap X$中的每一个顶点都饱和的匹配．显然，这两个匹配的并集仍然是G的匹配，且$\bar{Z}$中的每个顶点都是关于这个匹配的饱和顶点．故边独立数$\alpha'(G)\geqslant|\bar{Z}|=\beta(G)$．再由(6.6)立即得到$\alpha'(G)=\beta(G)$．□

推论 6.6 如果G是无孤立点的二部图，则

$$\alpha(G)=\beta'(G)$$

证 这是(6.1)、(6.2)以及(6.7)的直接推论．□

习 题

6.1.1 求下列各图的独立数和边独立数：

(1) 轮W_n；

(2) 完全三部图$K_{r,s,t}(r\leqslant s\leqslant t)$；

(3) 在平面直角坐标系中以(i,j)为顶点，$i=0,1,\cdots,m$，$j=0,1,\cdots,n$．以平行于坐标轴的线段为边，由$m\times n$个单位正方形拼成的$m\times n$长方形．

6.1.2 证明对于任何图G都有$\beta(G)\geqslant\alpha'(G)$．

6.1.3 证明对于任何无孤立点的图G，都有

$$\alpha'(G)\leqslant\left\lfloor\frac{\nu}{2}\right\rfloor\leqslant\left\lfloor\frac{\nu+1}{2}\right\rfloor\leqslant\beta'(G)$$

6.1.4 证明对于任意简单图G有$\beta(G)\geqslant\delta(G)$，且$\beta(G)=\delta(G)$的充要条件是$G$或为空图，或为完全图，或为完全二部图．

6.1.5 证明若G是不含三角形的无环图，则

(1) $\Delta(G)\leqslant\alpha(G)$；

(2) $\varepsilon(G)\leqslant\frac{\nu}{2}\alpha(G)$；

(3) 当$\Delta(G)=\alpha(G)$时 $\mathrm{diam}(G)\leqslant 4$．

6.1.6 证明

(1) G是二部图的充分必要条件是存在$V^*\subset V(G)$，使得V^*既是G的独立集，又是G的覆盖．

(2) G是二部图的充分必要条件是对于G的每个子图H均有$\alpha(H)\geqslant \frac{1}{2}\nu(H)$。

(3) G是二部图的充分必要条件为对于每个使得$\delta(H)>0$的子图H都有$\alpha(H)=\beta'(H)$。

6.1.7 证明对于无孤立点的图G的任一个最大边独立集L，总可以再添加G中的一些边，使之成为G的最小边覆盖。

(提示：只需证明把L添加一些边后能够得到基数为$\nu-|L|$的覆盖。)

6.1.8 (1) 证明对于图G的任意一条边e，有

$$\alpha(G)\leqslant\alpha(G-e)\leqslant\alpha(G)+1$$

(2) 若e_1、e_2是G中相邻的两条边。证明不可能$\alpha(G-e_1-e_2)\geqslant\alpha(G)+2$。若$e_1$、$e_2$在$G$中不相邻，相应的结论是否还成立？

6.1.9 使得$\alpha(G-e)=\alpha(G)+1$成立的边e叫做图G的**α临界边**。如果图G的每一条边都是α临界边，则称G是**α临界的**。

设$K^{(1)},\cdots,K^{(2n+1)}$是$2n+1$个完全图。把$K^{(i)}$与$K^{(i+1)}$间每对顶点都连接边($i=1,\cdots,2n$)，并把$K^{(2n+1)}$与$K^{(1)}$间每对顶点也连接边。证明这样得到的图是$\alpha$临界的。

6.1.10 证明α临界图没有割点。

6.2 拉姆瑟数

与6.1中引进的独立集相对立的概念是团。如果S中任意两个顶点在G中都相邻，亦即$G[S]$是完全图，则称S是G的**团**。k个顶点的独立集叫做**k独立集**，k个顶点的团叫做**k团**。设k和ν是两个自然数，$k<\nu$，如果ν阶图的边较少，就容易产生k独立集；如果边较多，就容易产生k团。可以想象，当ν相对于k大得不多时，只要ν阶图的边分布得不疏不密，它就可以既不包含k独立集、也不包含k团。但是如果ν相对于k很大的时候，会不会无论图中的边怎样分布，总要出现k团或k独立集呢？对于这个答案并不明显的问题，拉姆瑟(F. P. Ramsey)在1930年给出了肯定的答复。他证明了下列事实：对于任意自然数k，l，总存在一个

最小的正整数 $r(k,l)$，使得阶为 $r(k,l)$ 的任一个图中，要么包含一个 k 团，要么包含一个 l 独立集．$r(k,l)$ 称为**拉姆瑟数**．

对于图中任意一个顶点，既可以认为它是 1 独立集，也可以认为它是 1 团，因此

$$r(1,l)=r(k,1)=1 \tag{6.8}$$

此外，从定义不难看出，对于一切自然数 $k,l\geqslant 2$，有

$$r(2,l)=l,\quad r(k,2)=k \tag{6.9}$$

例如以下说明 $r(2,l)=l$．一方面，如果 l 阶图不是空图，其中必有两点相邻，即存在2团；如果是空图，图中的 l 个顶点就是 l 独立集．另一方面，$l-1$ 阶空图 E_{l-1} 既不包含 2 团，也不包含 l 独立集．因此 $r(2,l)=l$．

对于一般的 k,l，下面的定理不仅归纳地证明了 $r(k,l)$ 对一切自然数 k 和 l 的存在性，同时还导出了 $r(k,l)$ 的一个上界．

定理 6.7 对于任意两个整数 $k\geqslant 2$，$l\geqslant 2$，如果 $r(k,l-1)$，$r(k-1,l)$ 都存在，则 $r(k,l)$ 也存在，并且

$$r(k,l)\leqslant r(k,l-1)+r(k-1,l) \tag{6.10}$$

此外，当 $r(k,l-1)$ 与 $r(k-1,l)$ 都是偶数时，(6.10)中的不等号严格成立．

证 设 G 是一个 $r(k,l-1)+r(k-1,l)$ 阶图．任取一个顶点 $v\in V(G)$，那么除了 v 以外，G 中还有 $r(k,l-1)+r(k-1,l)-1$ 个顶点，故下列两种情况必居其一：

(1) v 至少和 $r(k,l-1)$ 个顶点不相邻；

(2) v 至少和 $r(k-1,l)$ 个顶点相邻．

当(1) 成立时，设与 v 不相邻的顶点的集合为 S，那么 $G[S]$ 中或有 k 个互为相邻的顶点，或有 $l-1$ 个顶点互不相邻．若是前一种情形，G 中已有 k 团；若是后一种情形，把 $G[S]$ 中的 $l-1$ 个互不相邻的顶点再添加 v 就得到了 G 的一个 l 独立集．当 (2) 成立时，通过类似的推理，也能得到 G 中或有 k 团，或有 l 独立集．

现在证明定理的后半部分．设 $r(k,l-1)$ 与 $r(k-1,l)$ 都是偶数，又 G 是 $r(k,l-1)+r(k-1,l)-1$ 阶图．因 $r(k,l-1)+r(k-1,l)-1$ 是奇数，由推论 1.2 可知 G 必有一度为偶数的顶点 v．如果 v 至少和 $r(k,l-1)$ 个点不相邻，与前面的证明相同，G 必含有 k 团或 l 独立集；如果与 v 不相邻的顶点不足 $r(k,l-1)$ 个，则 v 的邻点至少为 $r(k-1,l)-1$ 个，但 $r(k-1,l)-1$ 是奇数，故其邻点至少为 $r(k-1,l)$ 个，和前面的分析一样，仍旧可以推出 G 或者有 k 团，或者有 l 独立集．□

定理 6.8 $r(k,l)\leqslant\binom{k+l-2}{k-1}$ (6.11)

证．对 $k+l$ 进行归纳．由(6.8)和(6.9)知当 $k+l\leqslant 5$ 时(6.11)成立．现在假定(6.11)对于满足 $5\leqslant k+l<m+n$ 的一切正整数 k,l 成立，那么由定理 6.7 推出

$$r(m,n)\leqslant r(m,n-1)+r(m-1,n)$$

$$\leqslant\binom{m+n-3}{m-1}+\binom{m+n-3}{m-2}$$

$$=\binom{m+n-2}{m-1}$$

故(6.11)对于一切正整数 k,l 成立．□

对于较小的 k 和 l，下面计算几个 $r(k,l)$ 的值．

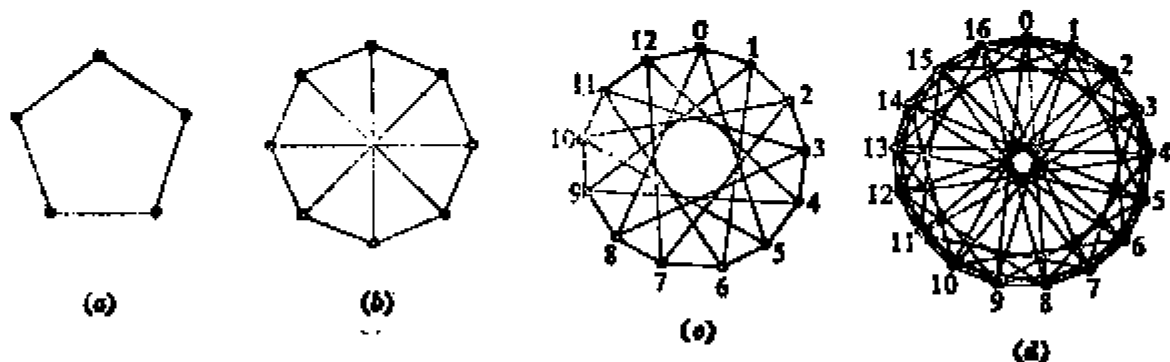


图 6.3

由(6.11),知 $r(3,3)\leqslant\binom{4}{2}=6$. 又由于 C_5 (图 6.3(a))不含 3 团,也不含 3 独立集,因此 $r(3,3)\geqslant 6$. 故 $r(3,3)=6$.

因为 $r(2,4)=4$, $r(3,3)=6$ 都是偶数,由定理 6.7 可知 $r(3,4)\leqslant r(2,4)+r(3,3)-1=9$. 另一方面,图 6.3(b) 所示的 8 阶图既不含 3 团,也不含 4 独立集,因此 $r(3,4)\geqslant 9$. 故 $r(3,4)=9$.

因为 $r(3,5)\leqslant r(3,4)+r(2,5)=14$, 又图 6.3(c)中的 13 阶图既不含 3 团, 又不含 5 独立集, 因此 $r(3,5)\geqslant 14$. 故 $r(3,5)=14$.

由于 $r(4,4)\leqslant r(4,3)+r(3,4)=18$,又图6.3(d)的17阶图既不含 4 团,也不含 4 独立集, 所以 $r(4,4)\geqslant 18$. 故 $r(4,4)=18$.

下面的表给出至目前为止所知的拉姆瑟数 $r(k,l)$.

k \ l	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7
3	1	3	6	9	14	18	23
4	1	4	9	18			

即使 k,l 都不大, 求出 $r(k,l)$确切的值也是非常困难的, 因此找出 $r(k,l)$的上下界就显得十分重要.前面已经给出了 $r(k,l)$ 的一个上界, 现在给出它的一个下界.

定理 6.9 当 $k\geqslant 3$ 时

$$r(k,k)>k\,2^{\frac{k}{2}-2} \tag{6.12}$$

证 用 $\mathscr{G}_n$ 表示以 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$为顶点集的一切图的集合, $\mathscr{G}_n^k$ 表示 $\mathscr{G}_n$ 中具有 k 团的图的集合. 这里的图是标定图,即认为顶点是有标记的. 也就是说, 两个图当且仅当对于任意一对顶点 v_i,v_j,它们同时有边相连或无边相连,才认为这两个图是相同的.

由于所有的无序顶点对$\{v_i, v_j\}$共有$\binom{n}{2}$个，而对于取定的两个顶点v_i, v_j，在构造$\mathscr{G}_n$中的图时，都有连接或不连接它们的两种方式，因此

$$|\mathscr{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}} \tag{6.13}$$

如果限定$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$中指定的某$k$个顶点必须互相连边，那么所得到的图的个数为$2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$，又由于在$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$中任意取定$k$个顶点的方法有$\binom{n}{k}$种，并注意到一个图同时可以有两个不同的$k$团，所以

$$|\mathscr{G}_n^k| \leqslant \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}} \tag{6.14}$$

从(6.13)及(6.14)推出

$$\frac{|\mathscr{G}_n^k|}{|\mathscr{G}_n|} \leqslant \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} < \frac{n^k 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} \tag{6.15}$$

假如$n \leqslant k\, 2^{\frac{k}{2}-2}$，从(6.15)可得

$$\frac{|\mathscr{G}_n^k|}{|\mathscr{G}_n|} < \frac{k^k 2^{-3k/2}}{k!}$$

令$l_k = k^k 2^{-3k/2}/k!$，则

$$\frac{l_k}{l_{k+1}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k 2^{3/2} = \frac{2^{3/2}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} > \frac{2^{3/2}}{e} > 1$$

又$l_3 < \frac{1}{2}$，故对于一切$k \geqslant 3$，$l_k < \frac{1}{2}$．于是

$$\frac{|\mathscr{G}_n^k|}{|\mathscr{G}_n|} < \frac{1}{2}$$

这就是说，在$\mathscr{G}_n$中含有k团的图不足半数．以$\tilde{\mathscr{G}}_n^k$记$\mathscr{G}_n$中具有k独立集的一切图的集合．任取$G \in \tilde{\mathscr{G}}_n^k$，则$G$的补图$\overline{G} \in \mathscr{G}_n^k$．显

然，这是$\widetilde{\mathscr{G}}_n^k$和$\mathscr{G}_n^k$间的一个一一对应关系，因此$|\widetilde{\mathscr{G}}_n^k|=|\mathscr{G}_n^k|$，即$\mathscr{G}_n$中含$k$独立集的图也不足半数.所以只要$n\leqslant k\,2^{(k/2)-2}$，$\mathscr{G}_n$中必有某个图既不含$k$团，也不含$k$独立集，故$r(k,k)>k\,2^{(k/2)-2}$. □

推论 6.10　如果$m=\min\{k,l\}$，则$r(k,l)>m^{(m/2)-2}$.

证　由定义立即看出

$$r(k,l)\geqslant r(m,m)>m\,2^{(m/2)-2} \quad \square$$

定理 6.9 上述的证明使用的是著名的匈牙利数学家厄迪希(P. Erdős)于 1974 年命名的"概率方法"，它是一种很有用的非构造性的方法，常用以证明某类图的存在性.

拉姆瑟数$r(k,l)$有几种形式上不同的定义. 例如$r(k,l)$可以定义为这样的最小正整数n，使得任一个n阶图，要么含有k阶完全子图，要么它的补图含有l阶完全子图. 还可以把$r(k,l)$定义成这样的最小正整数n，如果把n阶完全图的每一条边染成红色或蓝色，要么有边全是红色的k阶完全子图，要么有边全是蓝色的l阶完全子图. 按照后一种说法，就可以把拉姆瑟问题作如下推广：是否对一切自然数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，都存在最小正整数$n=r(k_1,k_2,\cdots,k_m)$，当把n阶完全图K_n的每条边任意用m种颜色中的一种去染时，总有K_n的一个k_i阶完全子图，它的边染的都是第i种颜色？

关于推广的拉姆瑟问题，有类似于定理 6.7 的下列结果.

定理 6.11

$$\begin{aligned} r(k_1,k_2,\cdots,k_m)\leqslant\, & r(k_1-1,k_2,\cdots,k_m) \\ & +r(k_1,k_2-1,\cdots,k_m)+\cdots \\ & +r(k_1,k_2,\cdots,k_m-1)-m+2 \end{aligned} \qquad (6.16)$$

证　设K是$r(k_1-1,k_2,\cdots,k_m)+r(k_1,\ k_2-1,\ \cdots,\ k_m)+\cdots+r(k_1,k_2,\cdots,k_m-1)-m+2$阶完全图，对于$K$的任意一个

顶点v，$d(v)=r(k_1-1,k_2,\cdots,k_m)+r(k_1,k_2-1,\cdots,k_m)+\cdots+r(k_1,k_2,\cdots,k_m-1)-m+1$. 因此，下列情况必属其一：或是以$v$为端点的边中染第1种颜色的不小于$r(k_1-1,k_2,\cdots,k_m)$条，或是染第2种颜色的边数不小于$r(k_1,k_2-1,\cdots,k_m)$条，$\cdots$，或是染第$m$种颜色的边数不小于$r(k_1,k_2,\cdots,k_m-1)$条. 不妨假定有$r(k_1-1,k_2,\cdots,k_m)$条以$v$为端点的边是第1种颜色，把这些边不同于$v$的端点组成的集记为$S$，$|S|\geqslant r(k_1-1,k_2,\cdots,k_m)$. 按照$r(k_1-1,k_2,\cdots,k_m)$的含义，导出子图$K[S]$中或是有$k_1-1$阶完全子图$K_{k_1-1}$，它的边都是第1种颜色，这时$K$的子图$v\vee K_{k_1-1}$是$k_1$阶完全子图，它的边全是第1种颜色；或是$K[S]$中有某个$k_i$阶完全子图的边已经都是第$i$种颜色，$i=2,3,\cdots,m$. 总之，在$K$中有某个$k_i$阶完全子图，它的边都是第$i$种颜色，$i=1,2,\cdots,m$. □

推论 6.12

$$r(k_1+1,k_2+1,\cdots,k_m+1)\leqslant\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_m)!}{k_1!k_2!\cdots k_m!} \tag{6.17}$$

证　对$k_1+k_2+\cdots+k_m$进行归纳.

当$k_1+\cdots+k_m=0$时，由于$r(1,1,\cdots,1)=1$及$0!=1$，故(6.17)成立.

设对于$k_1+\cdots+k_m\leqslant l$时(6.17)成立. 当$k_1+\cdots+k_m=l+1$时，利用(6.16)及归纳假设，有

$$\begin{aligned}
&r(k_1+1,k_2+1,\cdots,k_m+1)\leqslant r(k_1,k_2+1,\cdots,k_m+1)\\
&\quad+r(k_1+1,k_2,\cdots,k_m+1)+\cdots+r(k_1+1,k_2+1,\cdots,k_m)\\
&\leqslant\frac{(k_1+\cdots+k_m-1)!}{(k_1-1)!k_2!\cdots k_m!}+\frac{(k_1+\cdots+k_m-1)!}{k_1!(k_2-1)!\cdots k_m!}+\cdots\\
&\quad+\frac{(k_1+\cdots+k_m-1)!}{k_1!k_2!\cdots(k_m-1)!}=\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_m)!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}
\end{aligned}$$
□

从图论的角度看，拉姆瑟数可作如下的推广：给定m个图G_1，

$G_2,\cdots,G_m$，用$r(G_1,G_2,\cdots,G_m)$表示这样的最小正整数n，当把K_n的每一条边用m种颜色中任一种去染时，K_n总有一个子图G_i $(1\leqslant i\leqslant m)$，它的每一条边都是第$i$种颜色．如果$G_i$是$k_i$阶完全图$(1\leqslant i\leqslant m)$，$r(G_1,G_2,\cdots,G_m)$就是前面定义的拉姆瑟数$r(k_1,k_2,\cdots,k_m)$．因此，可以把$r(G_1,G_2,\cdots,G_m)$看成一种广义的拉姆瑟数．设$G_i$是$k_i$阶图$(1\leqslant i\leqslant m)$，由于$r(k_1,k_2,\cdots,k_m)=r(K_{k_1},K_{k_2},\cdots,K_{k_m})$存在，故$r(G_1,G_2,\cdots,G_m)$也一定存在．虽然很难求出拉姆瑟数$r(k_1,k_2,\cdots,k_m)$的值，但对于某些特殊的图$G_1,G_2,\cdots,G_m$，却可以算出$r(G_1,G_2,\cdots,G_m)$的值．下面是一个简单的例子．

定理 6.13　设T是一个t阶树，则

$$r(K_s,T)=(s-1)(t-1)+1 \tag{6.18}$$

首先证明一个以下要用到的简单结果．

引理 6.14　如果$\delta(G)\geqslant t-1$，则图G包含与任意的t阶树同构的子图．

证　对t归纳．$t=1$时结论显然成立．假定当$t<n$时结论成立．设图G满足$\delta(G)\geqslant n-1$，又T是一个n阶树，$n\geqslant 2$．任取T中的一度顶点v，又设v_1是T中与v相邻的顶点，$T_1=T-v$是$n-1$阶树．因$\delta(G)\geqslant n-1>(n-1)-1$，由归纳假设，$G$中有与$T_1$同构的子图$G_1$，设$G_1$中与$v_1$对应的点是$v_1'$．因$\delta(G)\geqslant n-1$，故$v_1'$在$G$中必有邻点$v_1''$，它不是$G_1$的顶点．显然把$v_1''$连同边$v_1'v_1''$添加到$G_1$上就得到与$T$同构的$G$的子图．□

定理 6.13的证明．

把$K_{(s-1)(t-1)}$的顶点均分为$s-1$部分，每一部分恰有$t-1$个顶点．同一部分中的任何一对顶点都用蓝边相连，而不同部分的任何一对顶点全用红边相连．因为$K_{(s-1)(t-1)}$的顶点总共分成$s-1$部分，所以任意s个顶点必有两个属于同一部分，从而连接它们的边是蓝色，故不存在边全是红色的子图K_s．又因为每一部

分恰有 $t-1$ 个顶点，故任何一个 t 阶树中必有分别属于不同部分的顶点，从而树中一定有红色的边，即不存在全是蓝边的 t 阶树．综上所述，有

$$r(K_s,T)\geqslant(s-1)(t-1)+1 \tag{6.19}$$

另一方面，对 s 进行归纳．当 $s=1$ 时，$K_{(s-1)(t-1)+1}=K_1$，可以认为它就是边全为红色的 K_1．设对于 $s<n$，任给 $K_{(s-1)(t-1)+1}$ 的一个红、蓝二色的边着色时，总出现全为红边的 K_s 或全为蓝边的 t 阶树．考虑 $s=n$ 的情况，任给 $K_{(n-1)(t-1)+1}$的一个红、蓝二色的边着色，假定其中不含边全是蓝色的 t 阶树 T． 令由全体蓝边生成的边导出子图为H，因H不含 t 阶树T，故由引理 6.14，H中一定有顶点 v，使得 $d_H(v)\leqslant t-2$，因此在 $K_{(n-1)(t-1)+1}$中与 v 关联的红边的数目必不小于$(n-1)(t-1)-(t-2)=(n-2)(t-1)+1$．任意取与 v 关联的$(n-2)(t-1)+1$ 条红边，考虑这些边不同于 v 的那些端点在$K_{(n-1)(t-1)+1}$中的导出子图，因为这个导出子图不含全由蓝边构成的 t 阶树T，从而由归纳假设可知其中必含全由红边构成的 K_{n-1}．由于 v 与 K_{n-1} 的每一个顶点都由红边相连，于是 $K_{(n-1)(t-1)+1}$ 的子图$v\vee K_{n-1}$ 就是边全为红色的 K_n．故

$$r(K_s,T)\leqslant(s-1)(t-1)+1 \tag{6.20}$$

综合(6.19)与(6.20)立即得到定理的结论． □

习　题

6.2.1　$r(2,2,2,3,5)=?$

6.2.2　当括号中有 n 个 3 时，令 $r(3,\cdots,3)=r_n$．

(1) 证明 $r_n\leqslant n(r_{n-1}-1)+2$．

(2) 利用 $r_2=6$ 及(1)证明 $r_n\leqslant[n!e]+1$．

(3) 证明 $r_3\leqslant17$．(Greenwood 和 Gleason 已证 $r_3=17$.)

6.2.3　证明

(1) $r(P_3,C_n)>n$, $r(P_3,C_4)=5$;

(2) $r(C_4,C_4)=6$;

(3) 用归纳法证明 $r(P_3,P_n)=n+2$. ($n\geqslant 3$.)

6.2.4 证明 $G=C_3\vee C_5$不包含 K_6,但若用 2 种颜色染G的每一条边时,必出现一个单色三角形. (R. L. Graham)

(对于 $m<n$,以 $f(m,n)$表示满足下面条件图G可能最小的顶点数: G不包含 K_n,但用 2 种颜色染G的每一条边时必出现一个单色的 K_m. 本题说明了 $f(3,6)\leqslant 8$. 实际上已证明 $f(3,6)=8$. 但现在还不知道 $f(3,5)$的确切值. Folkman 1970 年构造了一个不含 K_4的图,但用 2 种颜色染它的边总会产生单色三角形.)

6.3 图兰定理

如果图G的顶点集 $V=V(G)$ 可以分划为 $V=V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_k$,这里$V_i\neq\varnothing(1\leqslant i\leqslant k)$且$V_i\cap V_j=\varnothing(i\neq j,1\leqslant i,j\leqslant k)$,又$G[V_i](1\leqslant i\leqslant k)$都是空图,则$G$称为$k$部图, $G[V_i](1\leqslant i\leqslant k)$称为$G$的部. 又若 V_i的任一个顶点与 V_j的任一个顶点之间恰有一条边相连,则G称为完全k部图.

设 k、ν 是两个自然数,$k\leqslant\nu$. 问不包含k阶完全图的ν阶图最多能有多少条边.这个问题是匈牙利数学家图兰(P. Turán)于1941年提出并解决的.

在给出图兰的结果之前,首先证明下面的定理.

定理6.15 设 $V=V(G)$. 如果图G不含k阶完全图 K_k,则存在一个以V为顶点集的 $k-1$ 部图 H,使对于每个 $x\in V$,都有$d_G(x)\leqslant d_H(x)$. 而且当G不是完全 $k-1$ 部图时,至少有一个顶点 $x\in V$,使得 $d_G(x)<d_H(x)$.

证 对k进行归纳. 当 $k=2$ 时, G 是空图, 这时只需取$H=G$.

设定理的结论当 $k<n$ 时已成立. 考虑 $k=n$ 的情况. 选取G的一个度最大的顶点 u,令 $W=N(u)$是 u 的邻点集. 因为G

不包含 K_k、故 $G_0=G[W]$不包含 K_{k-1}. 根据归纳假设，存在一个以W为顶点集的 $k-2$ 部图 H_0，使对任意 $x\in W$，有

$$d_{G_0}(x)\leqslant d_{H_0}(x) \tag{6.21}$$

把 H_0的每个顶点与 $V\backslash W$ 的每个顶点之间连接一条边，所得的图记为 H. 因为图H中没有连接 $V\backslash W$ 中的顶点的边，所以H为$k-1$ 部图. 由于W的任何一个顶点与 $V\backslash W$ 的任何一个顶点之间在H中都有边相连，再由(6.21)，可知当 $x\in W$ 时

$$d_G(x)\leqslant d_H(x) \tag{6.22}$$

而当 $x\in V\backslash W$时，由于 u 是G中度最大的顶点，有

$$d_G(x)\leqslant d_G(u)=|W|=d_H(x) \tag{6.23}$$

把(6.22)与(6.23)联合在一起就证明了定理的前半部分.

用反证法证明定理的后半部分. 如果

$$d_G(x)=d_H(x) \quad (\text{对一切 } x\in V) \tag{6.24}$$

那么一定有

$$d_{G_0}(x)=d_{H_0}(x) \quad (\text{对一切 } x\in W) \tag{6.25}$$

事实上，若对于某个 $x_0\in W$，$d_{G_0}(x_0)<d_{H_0}(x_0)$，由于在$H$中$x_0$与$V\backslash W$ 的每个顶点相邻，将导致 $d_G(x_0)<d_H(x_0)$，与(6.24)矛盾.

根据归纳假设，G_0是完全 $k-2$ 部图.

由(6.24)，当然有

$$d_G(x)=d_H(x) \quad (\text{对一切 } x\in W) \tag{6.26}$$

由(6.25)、(6.26)以及任何顶点 $x\in W$ 与 $\overline{W}$ 的每一个顶点在H中相邻的事实，可知在G中任何顶点 $x\in W$ 也与 $\overline{W}$ 的每一个顶点相邻，于是在G中任何顶点 $x\in\overline{W}$ 与W中的每一个顶点相邻，从而 $\overline{W}$ 中的任何两个顶点在G中必不相邻，否则 $\overline{W}$ 中将有度大于$|W|$的顶点，这与G的最大度等于$|W|$相矛盾. 故G可由完全 $k-2$ 部图 G_0与空图 $G[\overline{W}]$相联而得到，即G是完全 $k-1$ 部图，与已知矛盾. □

引理6.16 一个 ν 阶完全 $k-1$ 部图边数最多的充分必要条

件是它的任何两部的顶点数最多相差1.

证 首先指出，如果一个完全 $k-1$ 部图中有两部的顶点数的差超过1，它的边数不可能最多. 设这个图的各部的顶点数分别为 $m_1, \cdots, m_{k-1}$，不妨假定 $m_1-m_2>1$，于是其边数为

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k-1} m_i m_j,$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k-1} m_i m_j = m_1 m_2 + m_1(m_3+\cdots+m_{k-1})$$

$$+ m_2(m_3+\cdots+m_{k-1}) + \sum_{3\leqslant i<j\leqslant k-1} m_i m_j$$

$$<(m_1-1)(m_2+1)+(m_1-1)(m_3+\cdots+m_{k-1})$$

$$+(m_2+1)(m_3+\cdots+m_{k-1})$$

$$+\sum_{3\leqslant i<j\leqslant k-1} m_i m_j \tag{6.27}$$

如果把原来顶点数为 m_1 的部减少一个顶点，顶点数为 m_2 的部增加一个顶点，其它各部的顶点数不变，这就得到一个新的完全 $k-1$ 部图，不等式(6.27)的右端正好表示这个新完全 $k-1$ 部图的边数. 因此原来的 $k-1$ 部完全图的边数不可能最多.

如果 $\nu=(k-1)l+r(0\leqslant r<k-1)$，设 ν 阶完全 $k-1$ 部图 G 的顶点集 $V=V(G)$ 的 $k-1$ 分划为 $V=V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_{k-1}$，又任何两个 V_i 和 $V_j(i\neq j)$ 的顶点数最多差1. 容易看出，$V_1, V_2, \cdots, V_{k-1}$ 中恰有 r 个，每个的顶点数为 $l+1$，其中恰有 $k-1-r$ 个，每个的顶点数为 l. 因此，任何两部的顶点数最多相差1的 ν 阶完全 $k-1$ 部图的结构相同，故在同构的意义下，这样的图是唯一的，这就证明了引理6.16. □

以 $T_{k-1}(\nu)$ 表示边数最多的 ν 阶完全 $k-1$ 部图，用 $t_{k-1}(\nu)$ 表示它的边数. 如果以 $ex(\nu, K_k)$ 表示不含 k 阶完全图的 ν 阶图的最大边数，则有下面的定理.

定理6.17（图兰定理）　$ex(\nu,K_k)=t_{k-1}(\nu)$，并且 $T_{k-1}(\nu)$ 是不含 k 阶完全图且边数等于 $t_{k-1}(\nu)$ 的唯一的图。

证　设 ν 阶图 G 不含 K_k。由定理6.15，存在一个以 $V=V(G)$ 为顶点集的 $k-1$ 部图 H，使得

$$d_G(x)\leqslant d_H(x)\quad(\text{对一切 } x\in V) \tag{6.28}$$

故

$$e(G)\leqslant e(H)\leqslant t_{k-1}(\nu) \tag{6.29}$$

显然 $T_{k-1}(\nu)$ 不含 K_k，故 $ex(\nu,K_k)=t_{k-1}(\nu)$。

又若 $e(G)=t_{k-1}(\nu)$，由(6.29)可知 $e(G)=e(H)$，再由(6.28)可知 $d_G(x)=d_H(x)$（对一切 $x\in V$）。由定理6.15知 G 是完全 $k-1$ 部图，根据引理6.16，边数为 $t_{k-1}(\nu)$ 的完全 $k-1$ 部图只能是 $T_{k-1}(\nu)$，故 $G\cong T_{k-1}(\nu)$。□

与拉姆瑟问题类似，可以考虑推广的图兰问题。设 G_k 是一个给定的 k 阶图，$\nu\geqslant k$，试求阶为 ν 且不包含 G_k 的图的最大边数 $ex(\nu,G_k)$，并确定合乎上面条件且边数达到 $ex(\nu,G_k)$ 的图。有关这一类问题的研究已发展为图论的一个重要分支——极值图论。

习　题

6.3.1　不包含 K_4 的8阶简单图最多能有多少条边？

6.3.2　证明若 G 是简单图，且 $e>\frac{\nu^2}{4}$，则 G 包含三角形。

6.3.3　证明不包含长为 k 的路的 ν 阶图的边数不超过 $\frac{k-1}{2}\nu$。

6.3.4　设 $1\leqslant k<\nu$，用归纳法证明有 $(k-1)\nu-\binom{k}{2}+1$ 条边的 ν 阶图包含一个最小度为 k 的子图。

6.3.5　证明具有 $(k-1)\nu-\binom{k}{2}+1$ 条边的 ν 阶图包含任意的 $k+1$ 阶树。

6.3.6　在9个人之间，有1个人认识2个人，2个人各认识4个人，4

个人各认识5个人，其余2个各认识6个人。证明有3个人他们互相都认识。

6.3.7 14名棋手赛棋，证明不管下了多少盘，总有3名棋手中任意两人都没赛过，或是有5名棋手中任意两名都赛过了。若两名棋手只赛一盘，问只要共赛过多少盘，就出现4名棋手他们两两之间都赛过了？

参考文献

Bollobás, B. (1979). Graph Theory an Introductory Course, Springer-Verlag New York Inc, 71—87, 103—127

Erdős, P. and Spencer, J. (1974). Probabilistic Methods in Combinatorics, Akadémiai Kiadó, Budapest

Folkman, J. (1970). Graphs with monochromatic complete subgraphs in every edge coloring. SIAM J. Appl. Math., 18, 19—24

Folkman, J. (1974). Notes on the Ramsey number N (3,3,3,3). J. Combinatorial Theory (A), 16, 371—79

Greenwood, R. E. and Gleason, A. M. (1955). Combinatorial relations and chromatic graphs. Canad. J. Math., 7, 1—7

Ramsey, F. P. (1930). On a problem of formal logic. Proc. London Math. Soc., 30, 264—86

Turán, P. (1941). An extremal problem in graph theory (Hungarian). Mat. Fiz. Lapok, 48, 436—52

第七章 图的着色

7.1 顶点着色

如果某两种化学药品接触后会产生有害反应，为了避免意外，它们就不宜存放在一起．假定有 n 种化学药品，问至少把它们分多少处存放，才能保证安全．我们看一看怎样把这个问题化为图论问题．用顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 表示 n 种药品，如果药品 v_i, v_j 不宜放在一起，就把顶点 v_i, v_j 用一条边连接起来，于是得到一个图 G．假定已经给出药品的一个贮存方案，把方案中存放在同一处的药品相对应的顶点染成同一种颜色，这样就可以用图 G 顶点的染色情况来表示药品的贮存方案．看药品的一个贮存方案是否安全，只需看图 G 中任何两个相邻的顶点是否染上不同的颜色．于是安全贮存药品的问题变成了下列图论问题：至少要用多少种颜色去染图 G 的顶点，才能使任意两个相邻顶点的颜色不同．这就引出了图的顶点着色概念．

把一个图的顶点染上颜色称为图的顶点着色，或简称为图的着色．凡使图的任一对相邻顶点具有不同颜色的顶点着色称为**正常的顶点着色**．由于这一章里所关心的总是正常的顶点着色，因此若不加声明，下文中所说的顶点着色均为正常的顶点着色．如果某一个着色中所用的颜色数目不超过 k，就称这个着色为 **k 着色**．如果图 G 存在 k 着色，则称 G 是 **k 可着色的**．使得 G 是 k 可着色的 k 的最小值称为 G 的**点色数**，简称为**色数**，记为 $\chi(G)$．若 $\chi(G)=k$，则称 G 是 **k 色图**．如果 G 的着色只用到 $\chi(G)$ 种颜色，则称这个着色为**最小着色**．图 7.1 中给出了所示图 G 的一个 3 着色，顶点旁的数字表示顶点染的是第几种颜色．由于这个图不存

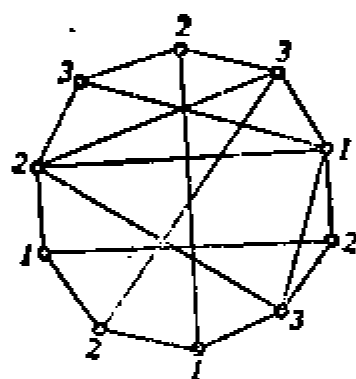


图 7.1

在 2 着色，所以 $\chi(G)=3$，即 G 是 3 色图，而且图示的是一个最小着色。

按照定义，有环的图不存在正常着色。此外对于有重边的无环图 G，只要给出它的底图的一个正常着色，就可以得到 G 的一个正常着色。因此，在有关图的顶点着色的 7.1，7.2 与 7.3 各节中，假定所讨论的图都是简单图。

给图 G 一个着色实际上相当于对 G 的顶点集 $V(G)$ 按照顶点的颜色给出一个分划，分划的每一部分都是图 G 中的独立集。反之，如果给出 $V(G)$ 的一个分划 $[V_1, V_2, \cdots, V_k]$，且每个 V_i 都是独立集，$1 \geqslant i \geqslant k$，那么这个分划也给出了 G 的一个着色。因此，以后常用 $V(G)$ 的分划 $[V_1, \cdots, V_k]$ 表示 G 的一个顶点着色，并且这时总是假定其中每个 V_i 是独立集。

求图的色数是顶点着色理论中的一个重要问题。显然，只有空图的色数是 1，只有非空 2 部图的色数为 2。虽然一般也可以说图 G 的色数为 k 的充要条件是 G 为 k 部图但不是 $k-1$ 部图，可是这样的论断的意义不大，原因在于当 $k>2$ 时，没有判断一个图是 k 部图的有效方法。对于个别图类，虽然比较容易断定它的色数。例如 n 阶完全图 K_n 的色数为 n，但是对于一般的图，计算色数是一个很难的问题，给出最小着色自然就更为困难了。下面介绍一个着色方法，虽然用它一般未必导出图的最小着色，但仍不失为对图着色的一个有效方法。

用①，②，$\cdots$，ⓝ，$\cdots$ 表示一个颜色序列，当 $i \neq j$ 时，颜色ⓘ与ⓙ是不同的。设 $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_\nu\}$，先把 v_1 染成颜色①。当 v_2 不是 v_1 的邻点时，仍把 v_2 染成颜色①；否则把它染成②。一般说来，当已经把 $v_1, \cdots, v_k$ 染色而得到 $G[\{v_1, \cdots, v_k\}]$ 的着色之后，

在使得$G[\{v_1,\cdots,v_{k+1}\}]$获得正常着色的前提下，总是用标号最小的颜色来染顶点v_{k+1}，这样一直到把G的全部顶点染好为止．这种不管最终的效果如何，而只是竭力用标号最小的颜色去染眼前遇到的顶点的算法称之为贪婪算法(参看定理3.14后的说明)．

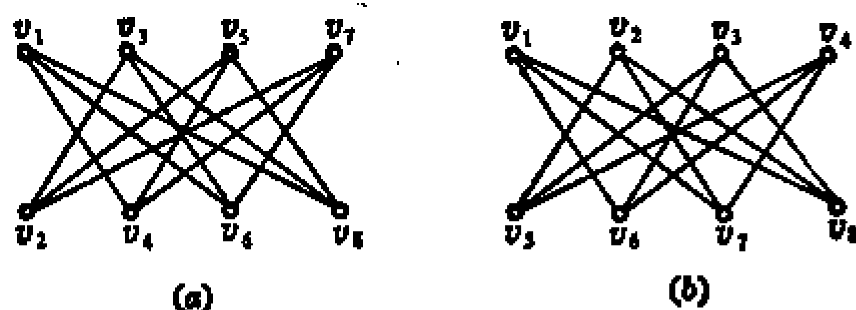


图 7.2

对于同一个图$K_{4,4}$，图7.2(a)与7.2(b)给出了其顶点的两个不同的顺序．对于7.2(a)的图使用贪婪算法，先把v_1染成①．因v_2与v_1不相邻，把v_2也染成①．由于v_3与v_2相邻，v_3必须染②．v_4与v_1相邻，也要染②．v_5与v_2、v_4都相邻，必须染③．如此下去，v_6染③，v_7、v_8都染④．一共用了4种颜色．而在7.2(b)中对图G使用贪婪算法，就可以把v_1、v_2、v_3、v_4都染成①，v_5、v_6、v_7、v_8都染成②，只用了2种颜色．由此可见，对于图G的顶点的不同排列，用贪婪算法染色所用的颜色的数目可能不同．适当地排列图G的顶点顺序，就可能以较少的颜色用贪婪算法染好图G．自然会提出这样的问题：是否对于任意的图都存在一个顶点顺序，使得按照这个顺序用贪婪算法就能得到最小着色呢？回答是肯定的．实际上，设$\chi(G)=k$，$[V_1,V_2,\cdots,V_k]$是G的一个最小着色．那么，只要把V_1中的顶点排在前面，然后排V_2中的顶点，接着排V_3中的顶点，如此下去，直到把V_k中的顶点排完，并按照这个顺序，用贪婪算法对G着色，显然只当染到V_i中的点时，才用到第i种颜色．因此，所得到的着色正是最小着色$[V_1,V_2,\cdots,V_k]$．

利用贪婪算法，可以得到图G色数的一个上界.

定理 7.1　设$k=\max\limits_{H}\delta(H)$，这里的$H$取遍$G$的所有的导出子图，则

$$\chi(G)\leqslant k+1 \tag{7.1}$$

证　由于H能取到G，所以$\delta(G)\leqslant k$. 从而G中有一个顶点v_ν. $d_G(v_\nu)\leqslant k$.令$H_{\nu-1}=G-\{v_\nu\}$. H也能取到$H_{\nu-1}$，因此$H_{\nu-1}$中也有一个顶点$v_{\nu-1}$,使得$d_{H_{\nu-1}}(v_{\nu-1})\leqslant k$. 再令$H_{\nu-2}=G-\{v_\nu,v_{\nu-1}\}$. 同样有$v_{\nu-2}\in V(H_{\nu-2})$,使得$d_{H_{\nu-2}}(v_{\nu-2})\leqslant k$. 这样下去，就得到一个点列$v_1,v_2,\cdots,v_\nu$,根据这个点列的作法，可知点列中的每个顶点$v_j$最多与它前面的$v_1,\cdots,v_{j-1}$中的$k$个顶点相邻，因此如果按$v_1,\cdots,v_\nu$的顺序使用贪婪算法给顶点染色，最多只会用$k+1$种颜色，故$\chi(G)\leqslant k+1$. □

推论7.2　对于任意图G，有

$$\chi(G)\leqslant\Delta(G)+1 \tag{7.2}$$

证　因G的任意导出子图H均有$\delta(H)\leqslant\Delta(G)$，由定理7.1立得推论. □

推论 7.3　如果G是连通的，且不是Δ正则图，则$\chi(G)\leqslant\Delta$.

证　由定理7.1，只需证明对G的任何导出子图H都有$\delta(H)\leqslant\Delta-1$. 若$H=G$. 因$G$不是$\Delta$正则图，故$\delta(H)\leqslant\Delta-1$；如果$H$是$G$的真子图，由于$G$是连通的，故有$x\in V(H),y\in V(G)\setminus V(H)$. 使得$xy\in E(G)$，从而$d_H(x)<d_G(x)\leqslant\Delta$，故$\delta(H)\leqslant d_H(x)\leqslant\Delta-1$. □

定理7.4　如果$\chi(G)=k$.则在G中存在k个顶点，它们每一个都至少有$k-1$个邻点，并且这些邻点的度均不小于$k-1$.

证　把$V(G)$分划为$V_1=\{v_1,\cdots,v_s\}$和$V_2=\{v_{s+1},\cdots,v_\nu\}$，$V_1$的顶点的度不小于$k-1$，$V_2$中顶点的度小于$k-1$. 再把$V_1$分

划为$V_1^{(1)}=\{v_1,\cdots,v_r\}$和$V_1^{(2)}=\{v_{r+1},\cdots,v_s\}$，$V_1^{(1)}$中的顶点在$V_1$中至少有$k-1$个邻点，$V_1^{(2)}$中的顶点在$V_1$中的邻点数小于$k-1$. 如果能够证明$|V_1^{(1)}|=r\geq k$,则定理获证. 事实上，$V_1^{(1)}$中的顶点在$V_1$中至少有$k-1$个邻点，根据$V_1$的定义，这些顶点的度都至少为$k-1$. 因此，只需取$V_1^{(1)}$中任意$k$个顶点充当定理7.4中要找的$k$个顶点. 我们用反证法说明$|V_1^{(1)}|=r\geq k$. 如果这个结论不真，即$r<k$,对顶点序列$v_1,\cdots,v_r,v_{r+1},\cdots,v_s,v_{s+1},\cdots,v_\nu$用贪婪算法着色. 因$r<k$, 在染$V_1^{(1)}$中的顶点时至多需用$k-1$种颜色. 又$V_1^{(2)}$中每个顶点在$V_1$中的邻点数小于$k-1$, 因此染$V_1^{(2)}$中的顶点也至多需用$k-1$种颜色. 最后，由于$V_2$中的顶点的度均小于$k-1$,染它们也最多需用$k-1$种颜色. 从而用$k-1$种颜色就可以把$G$的全部顶点染好，这与$\chi(G)=k$矛盾. □

推论7.5　如果$\chi(G)=k$，则G中度不小于$k-1$的顶点数目至少为k. 并且若度不小于$k-1$的顶点数目恰为k时，则G含有唯一的k团.

证　显然. 定理7.4中已证明G中存在k个度至少为$k-1$的顶点. 若G中度达到$k-1$的顶点只有$v_1,v_2,\cdots,v_k$，这k个顶点就是定理7.4中肯定其存在的那k个顶点. 如果v_i与v_j不相邻，因v_i有不少于$k-1$个度至少为$k-1$的邻点. 故必有v_i的邻点u, $u\notin\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$,$u$的度至少为$k-1$,这与$G$中恰有$k$个度至少为$k-1$的顶点的假设矛盾. 于是$\{v_1,\cdots,v_k\}$是$G$的$k$团. 又$G$中度达到$k-1$的顶点只有这$k$个，故$\{v_1,\cdots,v_k\}$是$G$的唯一$k$团. □

从推论7.2可知简单图的色数至多为$\Delta+1$. 不难看出，奇圈与完全图的色数确实达到了$\Delta+1$. 1941年布鲁克斯(R.L. Brooks)证明了在连通图中只有这两个图类中的图的色数才能达到$\Delta+1$.

定理7.6(布鲁克斯定理)　如果G是简单连通图，并且不是奇

圈，也不是完全图，则 $\chi(G)\leqslant\Delta(G)$.

证 首先，根据推论7.3，可局限于讨论 G 是 Δ 正则图的情形．其次，可以假定 $\Delta(G)\geqslant3$. 因为当 $\Delta=0$ 或 1 时，G 只能是 1 阶或 2 阶完全图；而当 $\Delta=2$ 时，除了奇圈外，G 只能是偶圈，而当 G 为偶圈时显然有 $\chi(G)\leqslant\Delta(G)$. 最后，还可以假定 G 是 2 连通的．否则 G 可以看成它的块在割点逐步粘合起来的．如果 v 是一些块的公共顶点，只要这些块是 $\Delta(G)$ 可着色的，就可以把各块中顶点的颜色适当调换，使得它们在 v 染有相同的颜色，从而得到以 v 为公共顶点的各块构成的图的 $\Delta(G)$ 着色.

G 中存在顶点 v_ν, v_1 与 v_2 是它的两个不相邻的邻点，且 $G-\{v_1,v_2\}$ 是连通图．事实上，因为 G 不是完全图，故有不相邻的顶点 x 和 y，及连接 x、y 的最短路 $P=xx_1x_2\cdots y$，由 $xx_1x_2\cdots y$ 的最短性可以推出 x 与 x_2 必不相邻．令 $v_1=x$, $v_2=x_2$, $v_\nu=x_1$，即 v_1、v_2 是 v_ν 的两个不相邻的邻点．如果 G 的连通度不小于 3，则 $G-\{v_1,v_2\}$ 是连通的，上述的 v_1,v_2,v_ν 符合所求．如果 G 的连通度为 2，则 G 必有顶点 v_ν，使 $G-v_\nu$ 有割点．因此 $G-v_\nu$ 至少包含两个块．由 3.2 节知其中至少有两个端块，v_ν 在这两个端块中至少各有一个邻点，且这个邻点不是 $G-v_\nu$ 的割点，否则 G 将出现割点，与 G 2 连通矛盾．取 v_1 与 v_2 是 v_ν 的分别属于不同端块的上述邻点，显然 v_1 与 v_2 不相邻．又因 $d_G(v_\nu)=\Delta(G)\geqslant3$，故 $G-\{v_1,v_2\}$ 仍然是连通图.

为了证明 $\chi(G)\leqslant\Delta(G)$，现在我们用贪婪算法具体给出 G 的一个 Δ 着色．在 $G-\{v_1,v_2\}$ 中取 $v_{\nu-1}$ 是 v_ν 的邻点，$v_{\nu-2}$ 是 $G-\{v_1,v_2\}$ 中不属于顶点集 $\{v_{\nu-1},v_\nu\}$ 但与其中的顶点相邻的顶点，等等．在图 G 中对顶点列 $v_1,v_2,\cdots,v_\nu$ 施行贪婪算法．因 v_1 与 v_2 不相邻，它们都染成色①，又每个 $v_j(3\leqslant j\leqslant\nu-1)$ 都与排在其后的某个顶点相邻，所以由贪婪算法必能使用①，②$\cdots$ Δ 中的某个颜色着色．最后，由于 v_ν 有两个邻点 v_1 及 v_2 的颜色相同，因此 v_ν 的 Δ

个邻点至多染成 $\Delta-1$ 种颜色，由贪婪算法，也可用①，②，$\cdots$，Δ 中某个颜色来染 x_ν。□

习　题

7.1.1　设 $V(G)=\{x_1,\cdots,x_\nu\}$，$d(x_1)\geqslant d(x_2)\geqslant\cdots\geqslant d(x_\nu)$ 是图 G 的度序列，k 是满足 $k\leqslant d_k+1$ 的最大自然数，证明 $\chi(G)\leqslant k$。

7.1.2　证明对于任意图 G 都包含长为 $\chi(G)-1$ 的路。

7.1.3　证明对于任一个非空图 G 有以下性质：

1) $\varepsilon(G)\geqslant\binom{\chi(G)}{2}$，且使等式成立的图必为完全图；

2) $\chi(G)\leqslant\lceil\sqrt{2\varepsilon}\,\rceil$。

7.1.4　设 G 是 ν 阶简单图，$\overline{G}$ 是它的补图，证明，$\chi(G)+\chi(\overline{G})\leqslant\nu+1$。

7.1.5　证明对于任意图 G 有

1) $\alpha(G)\chi(G)\geqslant\nu(G)$；

2) $\chi(G)+\chi(\overline{G})\geqslant2\sqrt{\nu}$。只要 ν 是平方数，就存在使等式成立的图 G。

7.1.6　若对简单图 G 的任一个顶点 x 都有 $\chi(G-x)<\chi(G)$，则称 G 是（关于点着色的）点临界图；若对 G 的任一条边 e 有 $\chi(G-e)<\chi(G)$，则称 G 是（关于点着色的）边临界图，并且若此时 $\chi(G)=k$，相应地 G 还叫做 k 色点临界图或 k 色边临界图。显然无孤立点的边临界图必为点临界图。验证图 7.3 是点临界图而非边临界图。

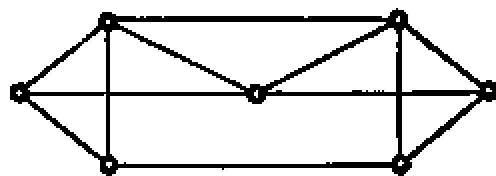


图 7.3

7.1.7　证明唯一的 1 色点临界图为 K_1，唯一的 2 色点临界图为 K_2，唯一的 3 色点临界图为奇圈。

7.1.8　证明若 G 是 k 色点临界图，则 $\delta(G)\geqslant k-1$。

7.1.9 证明边临界图中的团不可能是顶点割。

7.1.10 证明

(1) $\chi(G_1 \vee G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$；

(2) $G_1 \vee G_2$ 是边临界图当且仅当 G_1、G_2 都是边临界图；$G_1 \vee G_2$ 是点临界图当且仅当 G_1、G_2 都是点临界图.

7.1.11 对于图 G 的任意两个顶点 u, v，假定给 G 一个 k 着色，如果 u, v 总是同色或是不同色，则称 G 是 k 唯一可着色的

(1) 设 G 是 k 唯一可着色的，它的 k 着色导出的 $V(G)$ 的分划是 $[V_1, V_2, \cdots, V_k]$. 证明 $G[V_1, V_2, \cdots, V_{k-1}]$ 是 $k-1$ 唯一可着色的.

(2) 证明 G 是 2 唯一可着色的简单图的充要条件为 G 是连通的二部图.

(3) 证明 k 唯一可着色图是 $k-1$ 连通的.

(4) 证明 ν 阶 k 唯一可着色图的边数不小于 $(k-1)\nu - \frac{k(k-1)}{2}$.

(提示：把 $E(G)$ 划分为 $E(G[V_i \cup V_j])$ 的和，$1 \leqslant i < j \leqslant k$，$|E(G[V_i V_j])| \geqslant |V_i| + |V_j| - 1$.)

(5) 对于 $2 \leqslant k \leqslant n$，构造一个 n 阶 k 唯一可着色图，使其边数为 $(k-1)n - \frac{k(k-1)}{2}$.

7.1.12 验证下面的图(图7.4)不含三角形，但它是 3 唯一可着色的. (哈拉里等人已证明对于所有的 $n \geqslant 3$，都存在不含 n 团的 n 唯一可着色图.)

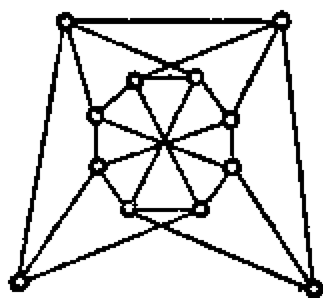


图 7.4

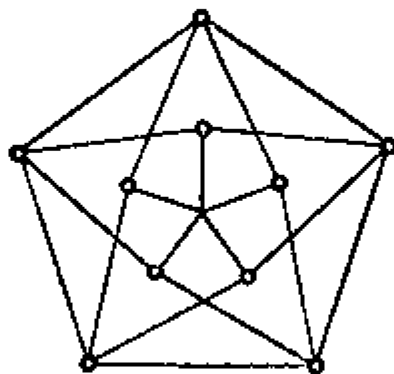


图 7.5 Grötzsch 图

7.1.13 验证格罗兹(Grötzsch. H)图不包含三角形，但它的色数是 4. (厄迪希证明了对于任意大于 1 的整数 k、l，存在围长是 k 色数为 l 的图.)并证明不存在 10 阶的不包含三角形的色数为 4 的图。

7.2 色多项式

本节讨论的图一律是标定图，即认为图的顶点都是有标记的。

考虑下面的问题：给定一个图和 k 种颜色．问用这些颜色对该图着色有多少种不同的方法．由于标定图的顶点是有区别的，所以只要有一个顶点染的颜色不同，就认为这是两种不同的着色．例如对于图 E_3，依次把它的顶点 v_1、v_2、v_3 染成红、黄、蓝色和依次染成红、蓝、黄色，就是两种不同的着色．以 $\pi_G(k)$ 表示用 k 种颜色的全体或其一部分对图 G 着色的所有不同方法的数目．本节将证明，$\pi_G(k)$ 可表示为 k 的一个多项式，因此 $\pi_G(k)$ 叫做 G 的**色多项式**．

显然，当 $k<\chi(G)$ 时，$\pi_G(k)=0$，当 $k\geqslant\chi(G)$ 时，$\pi_G(k)>0$，因此 $\chi(G)$ 就是满足 $\pi_G(k)>0$ 的最小自然数 k．于是，如果求出一个图的色多项式，就很容易算出它的色数，可是一般地说，求图的色数是十分困难的，这就说明求色多项式也是十分困难的．但是，对于某些特殊的图类却不难求出其色多项式，下面给出两个例子．

例 1　求 $\pi_{E_\nu}(k)$．

解　因为不管把 E_ν 的每个顶点染成什么颜色，都将给出 E_ν 的正常着色．所以 E_ν 的每个顶点可以染成 k 种颜色中的任一种颜色．由此可知 $\pi_{E_\nu}(k)=k^\nu$．

例 2　求 $\pi_{K_\nu}(k)$．

解　设 v_1 是 K_ν 的任一个顶点，染 v_1 时有 k 种颜色可用．染第二个顶点 v_2 时，由于 v_2 与 v_1 相邻，只有 $k-1$ 种颜色可供选择，依此类推．不难得出 $\pi_{K_\nu}(k)=k(k-1)\cdots(k-\nu+1)$．

下面给出一个用递推公式算色多项式的方法．

定理 7.7　对于简单图 G 的任意一条边 e，有下列等式：

$$\pi_G(k)=\pi_{G-e}(k)-\pi_{G\cdot e}(k) \tag{7.3}$$

或 $$\pi_{G-e}(k)=\pi_G(k)+\pi_{G\cdot e}(k) \tag{7.4}$$

证 (7.3)与(7.4)是等价的，只需证明(7.4)．设 $e=uv$．$G-e$的全体着色可以分为两类：一类使 u 与v的颜色相同，另一类使 u 与 v 的颜色不同．不难看出，前一类着色与 $G\cdot e$ 的全体着色之间存在一一对应，而后一类着色与G的全体着色之间存在一一对应．因此 $\pi_{G-e}(k)=\pi_{G\cdot e}(k)+\pi_G(k)$． □

(7.3) 右端涉及的两个图 $G-e$ 和 $G\cdot e$ 的边数都比G的边数少，因此反复应用(7.3)就可以把 $\pi_G(k)$表示为若干空图的色多项式的代数和，注意到例 1 的结果就会知道 $\pi_G(k)$ 确实是 k 的多项式．这种求色多项式的方法通常称为减边法．

如果图H中有两个不相邻的顶点 u 和 v，令$G=H+uv$，(7.4)就变成了 $\pi_H(k)=\pi_G(k)+\pi_{G\cdot e}(k)$．反复利用这个等式，可以把$\pi_H(k)$化成一些完全图的色多项式的和．这种求色多项式的方法通常称为加边法．当一个图的边数较少时，用减边法求色多项式较为方便；当图的边数较多时，用加边法求色多项式较为方便．下面给出两个求色多项式的例子，为简便起见，图的色多项式用相应的图的图形来表示．

例 3 用减边法求色多项式

图 7.6

$=k^4-3k^3+3k^2-k=k(k-1)^3$

例 4 用加边法求色多项式

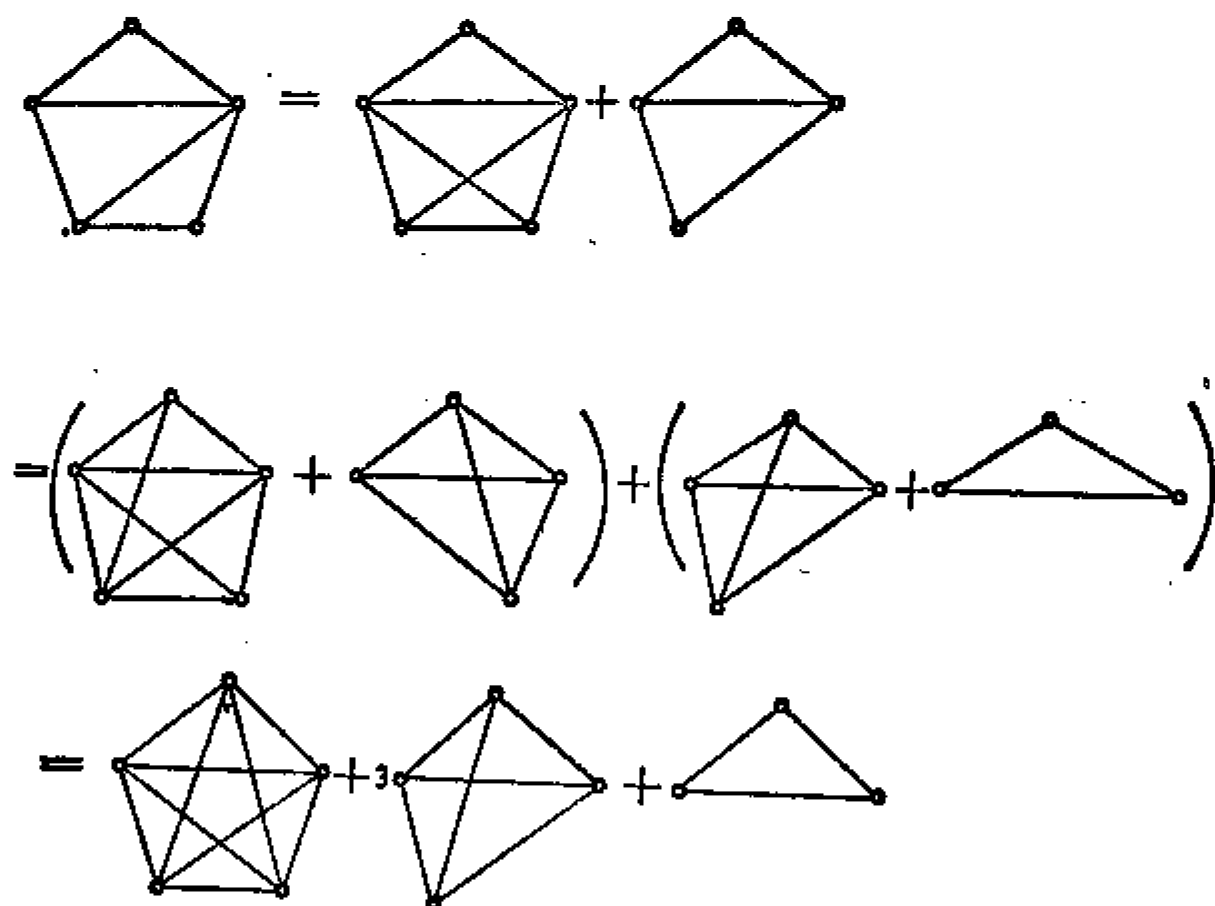


图 7.7

$=k(k-1)(k-2)^3$

定理 7.8 设图 G 有 ν 个顶点，e 条边，ω 个分支，则

$$\pi_G(k)=\sum_{i=0}^{\nu-\omega}(-1)^i a_i k^{\nu-i} \qquad (7.5)$$

这里 $a_0=1, a_1=e, a_i>0, 0\leqslant i\leqslant \nu-\omega$。

证 对 $\nu+e$ 进行归纳。当 $\nu+e=1$ 时，G 为单点图，$\nu=1$，$e=0, \omega=1$，(7.5)显然成立。

假定对于所有顶点数与边数的和小于 $\nu+\varepsilon$ 的图，(7.5) 都成立. 下面对于 ν 个顶点，ε 条边，ω 个分支的图 G 证明 (7.5). 首先可以假定 $\varepsilon>0$，因若 $\varepsilon=0$，则 $G=E_\nu$，$\pi_G(k)=k^\nu$，(7.5)显然成立. 当 $\varepsilon>0$ 时，取 $uv\in E(G)$，并令 $G_1=G-uv$，$G_2=G\cdot uv$. 由于 $\nu(G_1)=\nu(G)=\nu$，$\varepsilon(G_1)=\varepsilon(G)-1=\varepsilon-1$，而其连通分支数或为 ω 或为 $\omega+1$，根据归纳假设 $\pi_{G_1}(k)=k^\nu-(\varepsilon-1)k^{\nu-1}+\sum_{i=2}^{\nu-\omega}(-1)^i b_i k^{\nu-i}$. 此处 $b_i\geqslant 0$. 又 $\nu(G_2)=\nu(G)-1=\nu-1$，$\varepsilon(G_2)<\varepsilon$，分支数仍为 ω，故 $\pi_{G_2}(k)=k^{\nu-1}-\sum_{i=2}^{\nu-\omega}(-1)^i c_i k^{\nu-i}$，$c_i>0$.

由定理 7.7 得

$$\pi_G(k)=\pi_{G_1}(k)-\pi_{G_2}(k)$$

$$=k^\nu-\varepsilon k^{\nu-1}+\sum_{i=2}^{\nu-\omega}(-1)^i(b_i+c_i)k^{\nu-i}$$

$$=k^\nu-\varepsilon k^{\nu-1}+\sum_{i=2}^{\nu-\omega}(-1)^i a_i k^{\nu-i}$$

$$a_i=b_i+c_i>0 \quad \square$$

推论 7.9　若图 G 有 ω 个分支，$\chi(G)=p$. 则

$$\pi_G(k)=k^\omega(k-1)^{q_1}(k-2)^{q_2}\cdots(k-p+1)^{q_{p-1}}P(k)$$

这里 $P(k)$ 是一个常数项不等于零的多项式，又 $q_1,\cdots,q_{p-1}$ 是正整数.

证　首先容易由(7.5)式看出，$\pi_G(k)$ 含因子 k^ω 而不含因子 $k^{\omega+1}$. 又因 $\chi(G)=p$，故 $\pi_G(1)=\cdots=\pi_G(p-1)=0$，所以 $\pi_G(k)$ 有推论中的形式. □

最后介绍一个定理，在某些情形它可以简化求图的色多项式的运算过程.

定理 7.10　设 K_r 是含于连通图 G 内的一个 r 阶完全图，

$G-K_r$ 有 ω 个连通分支 $G_1',\cdots,G_\omega'$, $G_i=G[V(K_r)\cup V(G_i')]$. 则

(1) $\pi_{G_i}(k)=k(k-1)\cdots(k-r+1)P_i(k)$, (7.6)

(2) $\pi_G(k)=k(k-1)\cdots(k-r+1)\prod_{i=1}^{\omega}P_i(k)$, (7.7)

(3) $\chi(G)=\max\{\chi(G_1),\cdots,\chi(G_\omega)\}$. (7.8)

其中 $P_i(k)$ 是首项系数为 1 的 $\nu(G_i)-r$ 次多项式.

证 (1) 因为 G_i 包含 K_r,所以 $\chi(G_i)\geqslant r$. 只要令式 (7.6) 中的 $P_i(k)$ 是推论 7.9 的 $\pi_G(k)$ 中 $k(k-1)\cdots(k-r+1)$ 以外其余因子的积即可.

(2) (7.6)式右端的因子 $k(k-1)\cdots(k-r+1)$ 表示用 k 种颜色对 K_r 着色的数目. 由于 K_r 是完全图,它的各个顶点染上的颜色必不相同. 此时,再给 G_i 中 K_r 以外的各个顶点着色,其方法数显然与 K_r 着色的情况无关,它等于(7.6)中的 $P_i(k)$. 又 G_i' 互不连通.因此对所有的 G_i' 共有 $\prod_{i=1}^{\omega}P_i(k)$ 种不同的着色方法,于是用 k 种颜色给 G 着色的方法数目为 $k(k-1)\cdots(k-r+1)\cdot\prod_{i=1}^{\omega}P_i(k)$.

(3) 不妨设 $\chi(G_\omega)=\max\{\chi(G_1),\cdots,\chi(G_\omega)\}=l$.于是 $l(l-1)\cdots(l-r+1)P_i(l)\neq0, i=1,\cdots,\omega$, 而 $(l-1)(l-2)\cdots(l-r)\cdot P_\omega(l-1)=0$,故 $l(l-1)\cdots(l-r+1)\prod_{i=1}^{\omega}P_i(l)\neq0$, $(l-1)(l-2)\cdots(l-r)\prod_{i=1}^{\omega}P_i(l-1)=0$. 即 $\pi_G(l)\neq0,\pi_G(l-1)=0$. 所以 $\chi(G)=l$. □

下面看一看这个定理的应用．设图 G_1 中含完全图 K_r，添加顶点 v 并在 v 与 K_r 的每一个顶点之间连边，记这样得到的图为 G．如果把这里的图 G_1 与 G 类比为定理 7.10 中的 G_1 与 G，那么定理 7.10 中的 G_2 可看成 K_{r+1}．由定理 7.10 可知 $\pi_G(k)=\pi_{G_1}(k)(k-r)$．这就是说，如果原来图 G 的色多项是 $\pi_G(k)$，添加一个顶点与 G 中的一个 r 阶完全图的各顶点相连，那么新得到的图的色多项式就是把 $\pi_G(k)$ 乘以 $(k-r)$．一个树可以通过由一个顶点出发逐次添加新顶点，且新顶点只与原来树中的一个顶点相连的办法构造出来．每连接一个顶点，色多项式就要乘上一个因子 $k-1$．而最初只有一个顶点时的色多项式为 k，由此不难推出 ν 阶树的色多项式为 $k(k-1)^{\nu-1}$．例 3 中的图是4阶树，因此立即可知它的色多项式为 $k(k-1)^3$．例 4 中的图则可以看成由一个三角形连续添加两个顶点，且每添加一个顶点都与原来图中的 K_2 的两个顶点相连．由定理 7.10 每添加一个顶点就要在色多项式上乘以因子 $k-2$，而三角形的色多项式为 $k(k-1)(k-2)$，从而例 4 中的图的色多项式为 $k(k-1)(k-2)^3$．

色多项式概念是伯克霍夫(G. D. Birkhoff)和刘易斯(D. Lewis)为了证明四色定理引入的．虽然未能用它解决四色问题，但是色多项式问题本身已成为图论中一个活跃的研究领域．

习　题

7.2.1　计算下面两个图(图7.8)的色多项式．

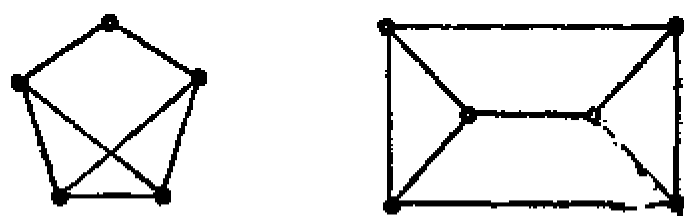


图 7.8

7.2.2　证明 $k^4-3k^3+3k^2$ 不是色多项式．

7.2.3　若 $G_1, \cdots, G_\omega$ 是 G 的各分支，证明

$$\pi_G(k)=\pi_{G_1}(k)\cdots\pi_{G_\omega}(k)$$

7.2.4　证明 $\pi_{C_n}(k)=(k-1)^n+(-1)^n(k-1)$.

7.2.5　(1)证明 $\pi_{G\vee K_n}(k)=k(k-1)\cdots(k-n+1)\pi_G(k-n)$.

(2) 利用 7.2.5(1)及 7.2.4 证明

$$\pi_{W_{n+1}}(k)=k(k-2)^n+(-1)^n k(k-2)$$

(3) 求 $K_{2,m}$ 的色多项式.

7.2.6　(1) 利用计算色多项式的加边法证明，若 ν 阶图 G 不是空图，则 $\pi_G(k)$ 可表示为

$$k(k-1)\cdots(k-\nu+1)+m_1k(k-1)\cdots(k-\nu+2)+\cdots$$
$$+m_{\nu-2}k(k-1)$$

其中 $m_i\geqslant 0, i=1,\cdots,\nu-2$.

(2) 证明 $\pi_G(k)$ 没有大于 ν 的实根.

7.2.7　如果对于任一简单图 H，由 $\pi_H(k)=\pi_G(k)$ 可以推出 $H\cong G$，则称图 G 是色多项式唯一的.

(1) 试给出一个 6 阶 2 连通色多项式不唯一的图.

(2) 证明 K_ν 是色多项式唯一的.

(3) 证明 $K_\nu-e$ 是色多项式唯一的.

(4) 证明 C_n 是色多项式唯一的.

7.3　四色问题

四色问题不只是图论中最著名的问题，也是整个数学中享有盛名的问题．这个问题一般叙述为：对任何一张地图上的国家染色，是否只需四种颜色就能保证任意两个相邻的国家都可以染上不同的颜色？作为一个数学问题来要求，上述提法显然有含混不清的地方．例如，两个在边界上只有一个或几个公共点的国家算不算是相邻的？一个国家是否允许有两块或两块以上互不毗邻的领土？等等．首先，两国相邻是指它们的公共边界上至少包含一段连续曲线，因此两个只在一个或有限个点接壤的国家不算相邻；

否则我们可以象图 7.9 那样构造出任意多个在一点彼此相邻的国家，当然绝对不能用四种颜色对它们染色使得任何两个相邻的国家染上的颜色都不同．其次，国家是指由一条或若干条不自交的连续闭曲线围起来的连通闭区域，但是一个国家不能有两块或两块以上互不毗邻的领土．如果不这样约定，四色问题的答案也将是否定的．例如图 7.10 中的国 A 分成了两块，显然用四种颜色无

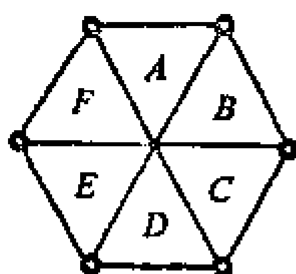


图 7.9

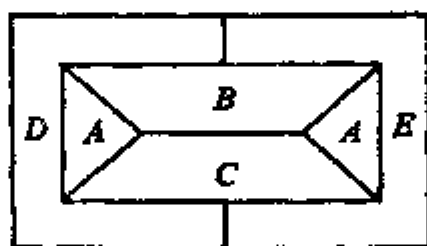


图 7.10

法使 A 中的两块都染上相同的颜色，并且任何相邻的两国的颜色都不同．最后，约定地图上国家的数目是有限的．如果把至少属于三个国家的边界上的点看成图的顶点，连接两个顶点的两国的公共边界看成边，又当一个国家被另一个国家全部包围时，就在其公共边界的闭曲线上任取一点作为顶点，这样一来，地图就成为一个平图，国家对应于平图的面．值得注意的是，因为一条边界的两侧总是不同的国家，因而与地图对应的平图没有割边．于是可以这样陈述地图的染色问题：是否可用四种颜色给任意一个无割边的平图的面着色，使得任何两个相邻的面的颜色不同．对于一个平图 G，如果能够使每个面都染以给定的 k 种不同颜色之一，使得任意相邻的两个面的颜色不同，就称 G 是 **k 面可着色的**．这样，四色问题又可以叙述为，是否每一个无割边的平图都是 4 面可着色的．由于无割边的平图 G 的对偶图 G^* 是无环平面图，又因 G 的面与 G^* 的顶点相对应，且 G 中的面是否相邻对应于 G^* 中相应的顶点是否相邻，故 G 的面着色对应于 G^* 的顶点着色（参看节 4.3 对

偶图). 再因G^*的顶点着色问题等价于G^*的底图的顶点着色问题,故四色问题等价于:对于一个简单平面图G是否总有$\chi(G)\leqslant 4$?

1852年弗兰西斯·嘉思瑞((Francis Guthrie)在和他弟弟弗雷德里克·嘉思瑞(Fredrick Guthrie)的通信中提出了四色问题,弗雷德里克求教于他们的老师德·摩根(De morgan),摩根与他的朋友在通信中讨论过这个问题,但无法解决. 1878年凯莱在伦敦数学会宣布了这个问题,这才引起数学界的广泛注意. 肯佩(Kempe)和泰特(P. G. Tait)分别在1879年和1880年发表文章,声称证明了四色问题. 十一年后,希伍德(P. J. Heawood)于1890年指出了肯佩证明中的错误,但却利用肯佩的方法证明了五色定理,即任何一个简单平面图的色数不超过5. 还应当指出,肯佩关于四色问题的文章虽有错误,但他的方法对后来四色问题的解决是有启发的. 1891年彼得森指出了泰特证明中的错误,但泰特的方法也有其合理的部分,利用泰特的方法彼得森证明四色猜测与如下命题等价:任何一个2边连通3正则平面图的边色数(参看下一节)为3. 经过了一百多年之后,这个貌似简单的四色猜测才被美国的阿佩尔(K. Appel)和哈肯(W. Haken)于1976年借助了电子计算机给出了证明. 由于证明异常繁冗,而且其中某些部分必需借助于计算机来验证,当前仍有人对此证明持保留态度,也曾有人声称发现了证明中的错误. 不过迄今为止,在公开发表的文章和书籍中对其证明还是肯定的. 借助于电子计算机来解决一个多年无法回答的著名数学难题,阿佩尔和哈肯的工作在这方面无疑具有开创性,因而是值得称道的. 给出四色定理一个无需借助于计算机的证明仍然是一个未获解决的问题.

是否能对地图上的国家用五种颜色染色,使得任何两个相邻的国家染上不同的颜色,这就是五色问题. 根据前边的说明五色问题等价于:是否任何简单平面图的色数都不超过5?

证明四色问题虽然十分困难，但五色问题的证明却很容易。

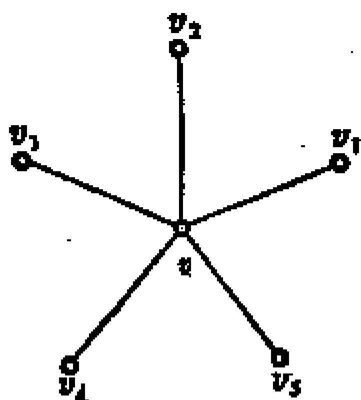


图 7.11

定理 7.11 每一个简单平面图的色数不超过 5 。

证 假定所考虑的图都是简单图. 如果存在色数超过 5 的平面图，那么必存在顶点数最小的非5色平面图 G，即 G 是色数大于 5 的平面图，而去掉 G 的任意一个顶点将得到 5 可着色的平面图. 不妨设 G 是一个平图，否则代替 G 考虑 G 的平面嵌入，这样的图 G 的每个顶点的度必不小于 5 . 事实上，若 $d(v)\leqslant 4$，又 $v_1,\cdots,v_i$ 是 v 的全部相邻顶点，$1\leqslant i\leqslant 4$. 因 $G-v$ 是 5 可着色的，对于 $G-v$ 的每一个 5 着色，染 $v_1,\cdots,v_i$ 最多用到 4 种颜色，可以用 5 种颜色中与 $v_1,\cdots,v_i$ 的染色都不同的颜色来染顶点 v，于是导出 G 的 5 着色，与 G 的色数大于 5 矛盾. 另一方面，由定理 4.9 又知 $\delta(G)\leqslant 5$，所以 G 必有一个顶点 v 的度是 5. 设其邻点为 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5，它们在平面上的位置如图 7.11 所示.

现在给出 $G-v$ 的一个 5 着色 (V_1,V_2,V_3,V_4,V_5). 由于 G 不是 5 可着色的，故 v 的邻点的颜色各不相同，不妨设 $v_i\in V_i$，$i=1,2,\cdots,5$. 考虑 $G-v$ 中由 $V_i\cup V_j$ 导出的子图 G_{ij}. v_1 与 v_3 必属于 G_{13} 的同一分支. 因若不然，可以在 v_1 所在的分支中把 1、3 两种颜色对换，所得到的仍然是 $G-v$ 的一个正常染色，经颜色对换后 v_1 就染成了与 v_3 相同的第 3 色，因而 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 总共只用到 4 种颜色，从而又将导致 G 5 可着色的矛盾. 于是平面上有一条路 P_{13} 连接 v_1 与 v_3，它上面的顶点染的是第 1 色或第 3 色. 同理 v_2、v_4 之间也有一条平面上的路 P_{24} 相连，它上面的顶点染的是第 2 色或第 4 色. 因为 $G-v$ 是平图，故 P_{13} 和 P_{24} 必有公共顶点 P. 作为 P_{13} 上的点，P 要染成 1 色或 3 色；同时作为 P_{24} 上的点，它

又应当染成 2 色或 4 色．这是一个矛盾．□

推敲一下五色定理的证明，矛盾就出现在 5 度顶点 v 上．一方面极小非 5 色平面图必须包含它；另一方面，极小非 5 色平面图包含它又会导致矛盾．从原理上来看，由阿佩尔和哈肯给出的四色定理证明的思想与此类似，所不同的是代替这里的 5 度顶点是大约两千个所谓"构形"(Configuration)组成的集合，而且其中有的构形的结构相当复杂．一方面极小非 4 色平面图必须包含这些构形中的某一个；另一方面，如果极小非 4 色平面图包含这些构形中的任何一个都将导致矛盾．由此说明极小非 4 可着色平面图不存在，从而也就说明了非 4 可着色平面图不存在．

习　题

7.3.1　证明平图 G 是 2 面可着色的充分必要条件为 G 是欧拉图．

7.3.2　证明除了 K_4 以外，每个平面三角剖分图都是 3 面可着色的．(提示：可用布鲁克斯定理．)

7.3.3　设 G 是 3 正则平图，证明 G 是 3 面可着色的充分必要条件是每个面都有偶数个边．

7.3.4　证明每一个哈密尔顿平图都是 4 面可着色的．

7.4　边着色

设有 n 个商人 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 参加交易会，商人 a_i 与 a_j 之间在会期内有 k_{ij} 件生意需要洽谈，假定每个单位时间内一个商人只能洽谈一件生意，试问至少需要多少单位时间方能洽谈完全部生意？我们以图的形式表示这个问题．以顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 分别表示 n 个商人，在 v_i, v_j 间连 k_{ij} 条边，每一条边表示一件需要洽谈的生意，这样就得到了一个图．显然，这样的图是无环图．如果把在同一单位时间内洽谈的各件生意对应的边染上同一颜色，由于一个商人在同一单位时间内最多只能洽谈一件生意，因此染成

同一颜色的边都不相邻. 即颜色相同的边是图的一个边独立集. 反之,如果把图中的边分划为若干边独立集,同一边独立集中的边染以相同的颜色.不同的边独立集里的边染以不同的颜色.显然,染成同一颜色的边就可以看成在同一单位时间内洽谈的生意. 这样一来,原先的问题就变成了如下问题:对于给定的一个无环图至少要用多少颜色才能把图的各边染色,使得染成同一颜色的边互不相邻? 这就是图的边着色问题.

设G是无环图,如果把G的每一条边都染上颜色,而且相邻的边的颜色都不同,那么这种染法就称为正常边着色. 由于我们感兴趣的只是正常边着色,因此以后正常边着色简称为边着色. 如果用不多于k种颜色就能给出图G的一个边着色,G就叫做k边可着色的. 在G的所有边着色中,所需最少的颜色数目称为G的边色数,记为$\chi'(G)$. 规定空图的边色数为0. 只要$\chi'(G)$种颜色的边着色,称为最小边着色.

实际上,图的一个边着色相当于图的边集的一个分划$(E_1,\cdots,E_k)$,其中每个E_i都是一个边独立集.

在边着色理论中最重要的结果是由苏联数学家韦津 (В. Г. Визин)得到的定理.

定理 7.12(韦津定理) 设简单图G的最大度为Δ,则$\Delta\leqslant\chi'(G)\leqslant\Delta+1$.

证 对于G的任意一个边着色,与G的度最大的顶点关联的Δ条边就要用Δ种颜色,因此$\chi'(G)\geqslant\Delta$. 以下证明$\chi'(G)\leqslant\Delta+1$.

对边数进行归纳. 对于空图显然有$\chi'(G)\leqslant\Delta+1$. 设对于任一个具有$e(G)-1$条边的图$G_1$,$\chi'(G_1)\leqslant\Delta(G_1)+1$成立. 取$xy_1\in E(G)$,于是$\chi'(G-xy_1)\leqslant\Delta(G-xy_1)+1\leqslant\Delta(G)+1$. 因此可以假定$G-xy_1$已经有了一个$\Delta+1$边着色,亦即图$G$中除边$xy_1$外一切其余的边都已用$\Delta+1$种颜色正常着色,以下证明

通过对边的颜色进行调整最后能够得到整个图 G 的 $\Delta+1$ 边着色。

我们约定如果与顶点 v 关联的边均未着某种颜色，就称顶点 v 缺少这种颜色。考虑前述的图 G 中除边 xy_1 外一切其余的边的 $\Delta+1$ 正常着色。因 G 的最大度为 Δ，因此它的每个顶点至少缺少 $\Delta+1$ 种颜色里的一种。设 x 缺少颜色 s，y_1 缺少颜色 t_1。现在令与 x 关联的颜色为 t_1 的那条边为 xy_2，设 y_2 缺少颜色 t_2。再令与 x 关联颜色为 t_2 的那条边为 xy_3，设 y_3 缺少颜色 t_3。继续进行上面的过程。当选好边 xy_h 时，就如图 7.8(a)那样。图中边 xy_1 用虚线画出，表示它没有染色；顶点旁边圈里的数字为该点缺少的颜色；边上的数字表示这条边的颜色。

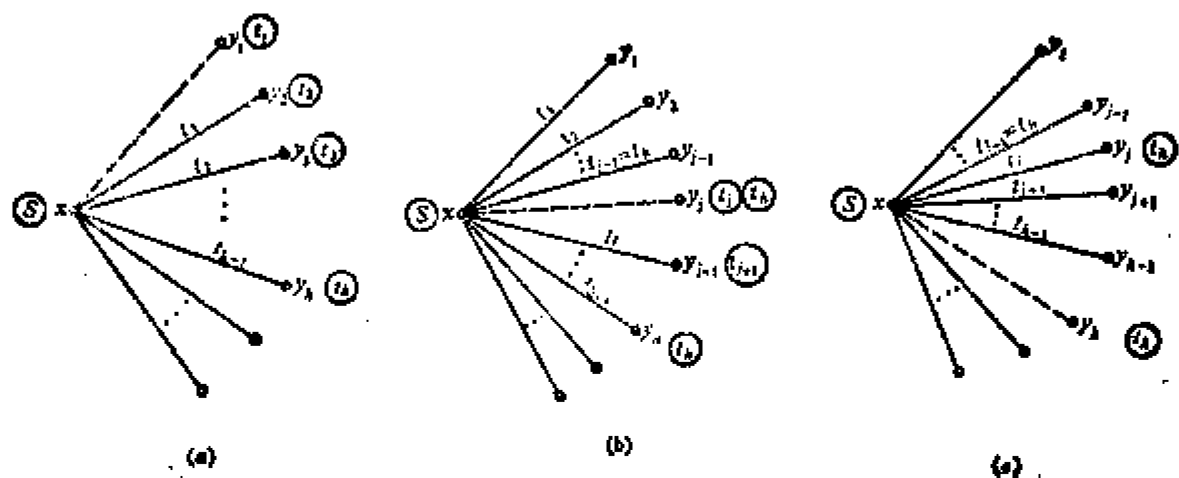


图 7.12

在上述过程中可能遇到下列两种情况：

(1) 当排到 $xy_1,\cdots,xy_h$ 时，在与 x 关联的边中找不到染有色 t_h 的边，即顶点 x 缺少颜色 t_h。这时只要把 xy_1 染成颜色 t_1，xy_2 改染为 $t_2,\cdots,xy_h$ 改染为 t_h。除这 h 条边外，其余各边颜色均不动。显然，这就是 G 的一个 $\Delta+1$ 着色。

(2) 当排列到 $xy_1,\cdots,xy_h$ 时，前面的某条边 xy_j 已染了色 t_h。即 $t_h=t_{j-1}$，$j<h$。这时先把 xy_1 染为 t_1，把 $xy_2,\cdots,xy_{j-1}$ 相应地改染为 $t_2,\cdots,t_{j-1}$，并取消 xy_j 上的染色，使 xy_j 成了未

染色的边．经过上述颜色调换后状况如图 7.8 (b)所示．现在考虑由染有颜色 s 及 t_k 的边构成的集合导出的子图 $H=H(s,t_k)$．由于 H 中的边只有两种颜色；所以$\Delta(H)\leqslant 2$，故 H 是由互不相交的圈或路组成的．在 $H(s,t_k)$中，由于 x 缺少颜色 s，但 xy_{j-1}已染了 $t_{j-1}=t_k$，故 $d_H(x)=1$．因为取消了 xy_j 上的颜色 $t_{j-1}=t_k$，所以 y_j 至少缺少色 t_k，故 $d_H(y_j)=1$（对应于色 s 在 y_j 出现的情形），或 y_j 根本不是图 H 的顶点（对应于色 s 在 y_j 不出现的情形）．y_k 原来就缺少色 t_k，从而同样有 $d_H(y_k)=1$ 或 y_k 不是 H的顶点．由此可知 x，y_j，y_k 不能同时在 H的一个连通分支内．我们分别处理下列两种情形：

(i) x,y_j 不属于 $H(s,t_k)$的同一分支．如果 y_j 是 $H(s,t_k)$ 的顶点，只要把 y_j 所在的图 H 的连通分支中各条边的颜色 s 与 t_k 互换，y_j 就缺少了色 s，这时把 xy_j 染上色 s 即可；如果 y_j 不是 $H(s,t_k)$的顶点，说明 y_j 缺少 s,t_k 两色，直接把 xy_j 染上色s．无论哪一种情形都得到了 G 的$\Delta+1$着色．

(ii) x,y_k 不属于 $H(s,t_k)$ 的同一分支．这时把 xy_j 染成色 t_j，$xy_{j+1},\cdots,xy_{k-1}$分别改染为色$t_{j+1},\cdots,t_{k-1}$，并取消 xy_k 上的颜色，这时边着色状况如图 7.8(c)．由于上述的颜色变化根本不牵涉颜色为 t_k 和 s 的边，故这时由颜色为 s 和 t_k 的边导出的子图仍然是原先的子图 H，所以 x 与 y_k 仍然不在同一连通分支内．若 y_k 是 H 的顶点，在 y_k 所在的连通分支中对调颜色 s 与 t_k，使得 y_k缺少颜色 s，这时把 xy_k 染以颜色 s；若 y_k 不是 $H(s,t_k)$的顶点，说明 y_k 缺少颜色 s 和 t_k，直接把 xy_k 染成色 s 即可．□

实际上，韦津证明了比定理 7.12 更一般的结果：如果 G 是边的最大重数为 μ 的无环图，则 $\Delta\leqslant\chi'(G)\leqslant\Delta+\mu$．定理7.12只是上述结果中 $\mu=1$ 的特殊情形．

存在图 G，使得 $\chi'(G)=\Delta+\mu$．例如图 G 有三个顶点，在每两个顶点间都连有 μ 条边．$\Delta(G)=2\mu$．由于 G 的 3μ条边中任

意两条都相邻，因此 $\chi'(G)=3\mu=\Delta+\mu$.

现在对简单图的点色数和边色数作一比较．设图的最大度 $\Delta>1$．点色数可能取 2 到 $\Delta+1$ 之间的每一个值，而边色数只能取 Δ 或 $\Delta+1$ 这两个值．从这一点看，对边色数的了解似乎更确切些．可是另一方面，布鲁克斯定理告诉我们 $\chi(G)=\Delta+1$ 的情形只可能是奇圈或完全图，而 $\chi'(G)=\Delta+1$ 的图 G 可能是哪些图却远没有弄清楚．满足 $\chi'(G)=\Delta$ 的图称为**第一类图**，而满足 $\chi'(G)=\Delta+1$ 的图称为**第二类图**.

定理 7.12 二部图 G 是第一类图.

证 只需证明 G 存在 Δ 着色．对 G 的边数进行归纳．根据规定，空图的边色数为 0，故它是第一类图．假定定理的结论对于边数小于 $\varepsilon(G)$ 的二部图都成立．设 $uv\in E(G)$，因此 $G-uv$ 有 Δ 边着色．由于 $d_{G-uv}(u)$ 和 $d_{G-uv}(v)$ 都小于 Δ，故在 $G-uv$ 的 Δ 边着色中，u 必缺少某颜色 i，v 必缺少某颜色 j．如果 v 也缺少颜色 i 或 u 也缺少颜色 j，只要把 uv 相应染上颜色 i 或 j 就得到 G 的 Δ 边着色．故只需对与 u 关联的某条边的颜色为 j 及与 v 关联的某条边的颜色为 i 的情况证明．考虑 $G-uv$ 中颜色为 i 的边与颜色为 j 的边的集合导出的子图 G_{ij}．显然 G_{ij} 的连通分支必为路或偶圈，而 u，v 都是路的端点．但由于 u，v 在 $V(G)$ 的二分划中属于不同的类，且它们在 G_{ij} 中关联的边的颜色不同，因此 u，v 必非同一条路的两个端点，即 u，v 属于 G_{ij} 的不同分支．这时只需在 u 所在的分支中把边上的颜色 i，j 进行对调，u 就缺少了颜色 j．把 uv 染成颜色 j 就得到了 G 的 Δ 边着色．□

定理 7.13 设 $\nu(G)=\nu$，如果 $\varepsilon(G)>\Delta\left\lfloor\frac{\nu}{2}\right\rfloor$，则 G 为第二类图.

证 假如 $\chi'(G)=\Delta$，由于同一种颜色的边数最多为 $\left\lfloor\frac{\nu}{2}\right\rfloor$，把

各种颜色的边数相加，就会得到 $e(G)\leqslant\chi'(G)\left[\frac{\nu}{2}\right]=\Delta\left[\frac{\nu}{2}\right]$. 矛盾. □

设 $\Delta>0$，又图 G 是阶 ν 为奇数的 Δ 正则图，$e(G)=\Delta\frac{\nu}{2}>\Delta\left[\frac{\nu}{2}\right]$. 因此立刻得到

推论 7.14 非空的奇数阶正则图是第二类图.

目前虽已弄清楚了某些图的类别，但给出第一类图与第二类图的特征仍是一个尚待解决的困难问题.

习　题

7.4.1 计算彼得森图的边色数.

7.4.2 若 G 是 3 正则哈密尔顿图，证明 $\chi'(G)=3$.

7.4.3 求偶阶完全图 K_{2n} 和奇阶完全图 K_{2n+1} 的边色数.

7.4.4 证明若 $e(G)>\alpha'(G)\Delta(G)$，则 G 是第二类图.

7.4.5 证明若 G 是有割点的 k 正则图，则 $\chi'(G)=k+1$.

7.4.6 如果连通图 G 是第二类图，而对 G 的每一条边 e，都有 $\chi'(G-e)<\chi'(G)$，则称 G 是(**关于边着色)临界图**. 若 G 是临界图，且 $\Delta(G)=\Delta$，则称 G 是 **Δ 临界图**.

(1) 试各举一个 3 临界图、4 临界图的例子.

(提示：可从某一个第二类图出发，逐个去掉非临界边.)

(2) 证明 G 是 2 临界图的充分必要条件为 G 是奇圈.

(3) 检验下面不包含三角形的图(图7.13)是 3 临界图.

7.4.7 如果 G 是 Δ 临界图，$uv\in E(G)$，证明

$$d(u)+d(v)\geqslant\Delta+2$$

7.4.8 证明不存在 4 阶和 6 阶的临界图. (已证明不存在阶小于 12 的偶阶临界图，但存在 18 阶临界图. 现在还不知道是否存在 12、14、16 阶的临界图.)

7.4.9 对于 $\Delta=2,3,4,5$，试各给出一个最大度为 Δ 的第二类平面图、

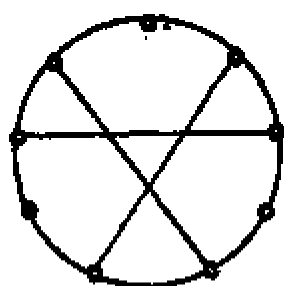


图 7.13

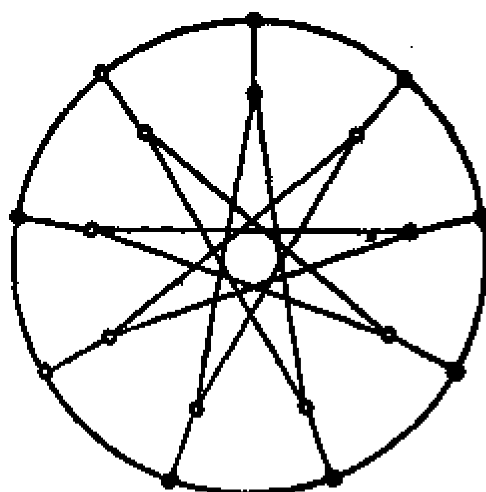


图 7.14

($\Delta\geqslant 7$的平面图都是第一类图。现在还不知道是否存在最大度为6的第二类平面图。)

7.4.10 设$\chi'(G)=k$,若对于G的任意两条边e_1,e_2,以及G的任一个k边着色,e_1与e_2总是着成同色或总是着成不同色,则称G是***k*边唯一可着色图**。

(1) K_3,K_4,K_5中哪个是边唯一可着色图?

(2) 验证图7.14是3边唯一可着色图。(可以证明,当$k\geqslant 4$时只有k星$K_{1,k}$是k边唯一可着色图。对于$k=3$,除了图7.14还不知道是否存在不含三角形的其它3边唯一可着色图。)

参考文献

Appel, K. and Haken, W. (1980). The four color problem, Mathematics Today—Twelve Informed Essays, Springer-Verlag, New York, 153—180

Appel, K. and Haken, W. (1977). Every planar map is four colorable part I: Discharging. Illinois J. of Mathematics, 21, 429—490

Appel, K. and Haken, W. (1977). Every planar map is four colorable part II: Reducibility. Illinois J. of Mathematics, 21, 491—567

Bollobás, B. (1978). Extremal Graph Theory, Academic Press Inc, London, 218—254

Bollobás, B. (1979). Graph Theory, an Introductory Course, Springer-Verlag New York Inc, 88—102

汉译本　图论导引教程(赵树春　朱学志译)，黑龙江科学技术出版社，1985，132—155

Bondy, J. A. and Murty, U. S. R. (1976). Graph Theory with Applications, The Macmillan Press LTD, London, 117—134

汉译本　图论及其应用（吴望名等译)，科学出版社，1984,126—144

Harary, F. (1969). Graph Theory, Addison Wesley, Reading Mass., Menlo Park, Calif. and London, 126—149

汉译本　图论（李慰萱译)，上海科学技术出版社，1980,145—172

Mycielski,J. (1955). Sur le coloriage des graph. Colloq. Math., 3,161—162

Read, R. C. (1968). An introduction to chromatic polynomials. J. Combinatorial Theory, 4,52—71

Yap, H. P. (1986). Some Topics in Graph Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 9—68

第八章 有 向 图

8.1 有向图与强连通性

虽然大量问题能借助于第一章中定义的图来表达，但有些问题只用图的概念不可能得到正确的描述，非得对图中的边给以定向不可．一个最浅显的例子是关于公路网上的交通问题，其中必须弄清楚哪些路是单行道，还需要确定单行道中允许行驶的方向．

有向图D是指一个有序的三元组$(V(D), A(D), \psi_D)$，$V(D)$和$A(D)$是互无公共元素的集合且$V(D)$非空，关联函数$\psi(D)$把$A(D)$中的每一个元素映射为$V(D)$中元素的序偶（偶中的元素可能相同）．$V(D)$称为有向图D的顶点集，其中的元素称为D的顶点；$A(D)$称为有向图D的弧集，其中的元素称为D的弧。考察下面的例子．

例 1 $D=(V(D), A(D), \psi_D)$

$$V(D)=\{u,v,w,z\}$$

$$A(D)=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7\}$$

$$\psi_D(a_1)=(u,v),\ \psi_D(a_2)=(v,v)$$

$$\psi_D(a_3)=(v,w),\ \psi_D(a_4)=(v,w)$$

$$\psi_D(a_5)=(w,v),\ \psi_D(a_6)=(w,u),\psi_D(a_7)=(z,w)$$

图 8.1 画出的是例 1 中的有向图的图形，顶点用小圆圈表示，弧用标有箭头的线段表示，箭头的方向指示了偶中元素的先后顺序．例如$\psi_D(a_1)=(u,v)$，代表弧a_1的线段的箭头方向就由u指向v．如果$\psi_D(a)=(u,v)$，则称顶点u为弧a的尾，顶点v为弧a的首，而a称为从u到v的弧，以顶点u为尾的弧称为顶点u的

出弧．以顶点 u 为首的弧称为顶点 u 的入弧，为简单起见把 $\psi_D(a)=(u,v)$ 记为 $a=(u,v)$，而图 $D=(V(D),A(D),\psi_D)$ 简记为 $D=(V(D),A(D))$，这时只需把 $A(D)$ 中的弧用它的尾和首的序偶表示．用这种表示方法，例 1 中的有向图 D 记为

$$D=(V(D),\ A(D))$$

$$V(D)=\{u,v,w,z\}$$

$$A(D)=\{(u,v),(v,v),(v,w),(v,w),(w,v),(w,u),(z,w)\}$$

应当注意的是，在这种记号下 $A(D)$ 中有些弧重复出现．例如在上面的例子中 (v,w) 出现两次，这表示有向图 D 中共有两条以 v 为尾，w 为首的弧．与图的情形类似，这时称从 v 到 w 有重弧．设 $D=(V(D),A(D))$，$D'=(V(D'),A(D'))$ 是两个有向图，如果 $V(D')\subseteq V(D)$，$A(D')\subseteq A(D)$，则称 D' 是 D 的有向子图，关于有向子图使用的术语和记号与 1.1 中关于子图所用的术语和记号类似．

如果把有向图 D 的每一条弧上的箭头都去掉，亦即把每一条形如 (u,v) 的弧用边 uv 来代替，这样得到的图称为有向图 D 的基础图．图 8.2 表示图 8.1 中的有向图的基础图．

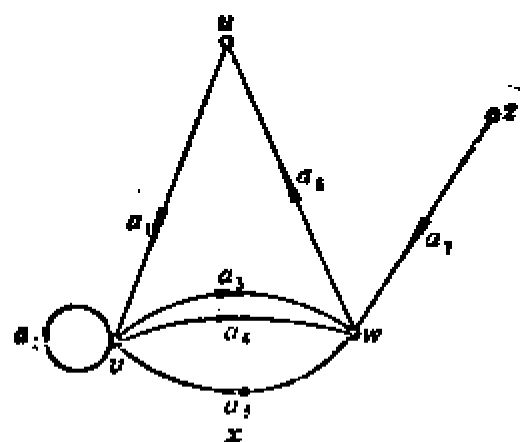


图 8.1

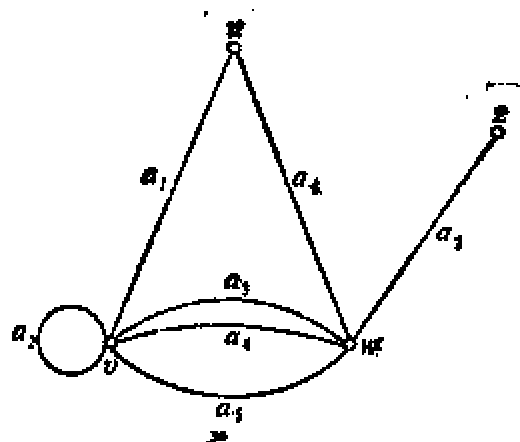


图 8.2

参照有向图的基础图来考虑，与图有关的概念都可以搬到有向图上来．例如，如果有向图 D 的顶点 u 和 v 在 D 的基础图中相

邻，则称 u 和 v 在 D 中相邻；有向图 D 中的圈是指 D 中这样的一些弧所构成的 D 的子图，使得与这些弧相对应的边在 D 的基础图中构成圈．等等．

如果 D 中无环，又 D 中无重弧，则称 D 是**简单有向图**．应当注意的是简单有向图的基础图不一定是简单图．只需看图 8.3 中的有向图 D 和它的基础图就能明白．

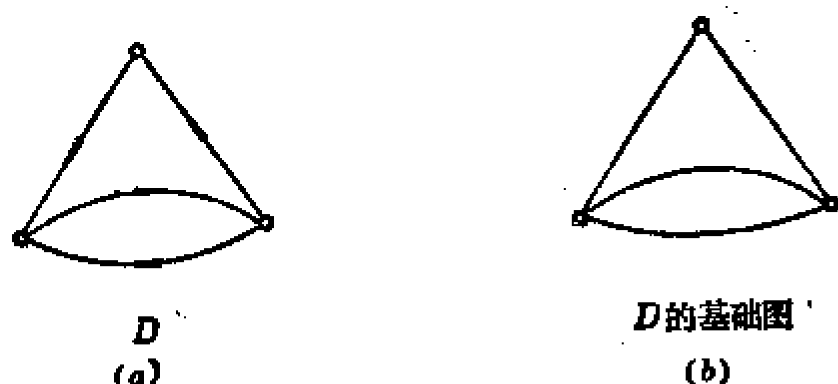


图 8.3

有一些概念只能在有向图中定义，以下叙述一些这样的概念．D 中的**有向途径**是指非空的有限序列 $W=(v_0, a_1, v_1, \cdots, v_{k-1}, a_k, v_k)$，其中的项交替地是 D 的顶点和弧，弧 a_i 的尾是顶点 v_{i-1}，首是顶点 $v_i(1\leqslant i\leqslant k)$．$v_0$ 称为 W 的**起点**，v_k 称为 W 的**终点**，与图的情形类似，简单图中的有向途径通常由它的顶点列 $(v_0, v_1, \cdots, v_k)$ 来简单表示，而对非简单有向图中的有向途径来说，它对应的顶点列所表示的有向途径一般是不唯一的．如果 W 和 W' 都是 D 中的有向途径，又 W 的终点正好是 W' 的起点，把 W 和 W' 连接起来仍然是 G 中的有向途径，记为 WW'．**有向迹**是指在基础图中对应于迹的有向途径．**有向闭途径**、**有向闭迹**、**有向路**、**有向圈**等可类似定义．

如果有向图的基础图连通，则称该有向图**连通**．

设 u 和 v 是有向图 D 中的顶点，如果 $v=u$ 或存在以 u 为起点，v 为终点的有向路 P，则称**可从 u 到达 v**，而 P 称为从 u 到 v 的有向路．如果既可从 u 到达 v，也可从 v 到达 u，则称**顶点 u 和**

顶点 v 是强连通的．强连通关系是 D 的顶点间的一个等价关系，即它满足反身、对称、传递三条性质．强连通关系诱导出 $V(D)$ 的一个分划 $(V_1, V_2, \cdots, V_m)$，D 的导出子图 $D[V_1], D[V_2], \cdots, D[V_m]$ 称为 D 的强连通分支．如果有向图 D 只有一个强连通分支，则称 D 强连通．显然，有向图 D 强连通的充要条件为：关于 D 中的任何两个顶点 u 和 v，既可从 u 到达 v，也可从 v 到达 u．图 8.4 中画出了一个有向图 D 和它的强连通分支．

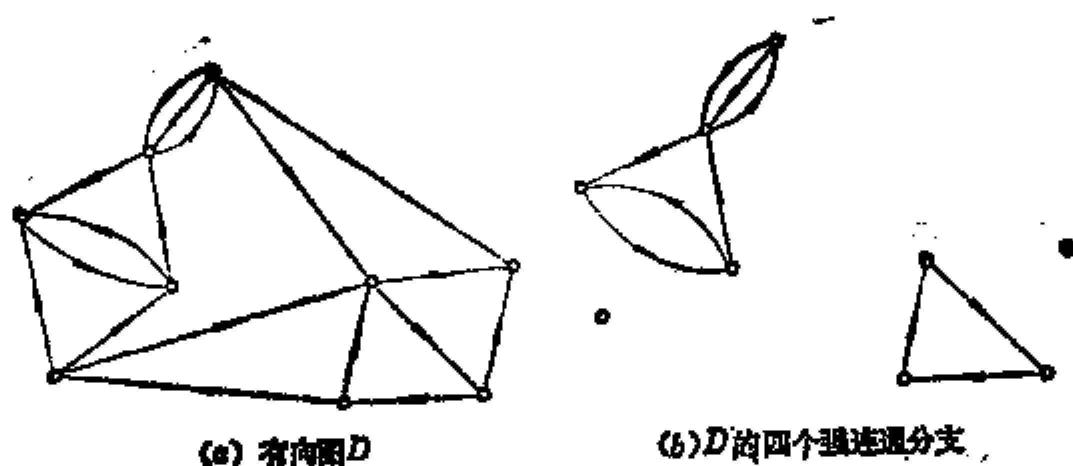

(a) 有向图 D　　(b) D 的四个强连通分支

图 8.4

关于连通有向图和强连通有向图的差别可以给出以下形象的比喻．设想有一公路网连接若干城镇，又每一条公路都是单向行驶的．这时可以把公路网看成一个有向图 D，D 的顶点是各城镇，而 D 的弧是公路网中的各条公路．有向图 D 连通相当于从任一城镇出发，不管公路规定的行驶方向，可以驱车到达任一其它的城镇．而有向图 D 强连通相当于从任一城镇出发，严格按照规定的行驶方向，可以驾车到达任何一个其它的城镇．

显而易见，一个单向行驶的公路网应当是强连通的，否则这个公路网"实质上"不连通，即严格遵照行驶规则不可能做到从任一个城镇驾车到达任一个其它的城镇．一个自然的问题是：在什么情况下才能对一个公路网规定其单行方向，使得从任何一个城镇出发严格按照规定的单行方向驾车到任意的另一个城镇．

对图G的每一条边(视为顶点的无序偶)都规定一个方向(即把顶点的无序偶规定其顺序而成为有序偶)称为对图G**定向**,由此而得到的有向图D有时也称为图G的**一个定向**. 如果可以对图G定向而得到强连通有向图,我们**就说图G可以强连通定向**,或图G存在强连通定向,而所得到的强连通有向图称为G的**一个强连通定向图**.

如果用图论的语言,前边谈到的关于公路网规定行驶方向的问题可叙述为:在什么情况下才能对一个图强连通定向?图8.5中给出图G和它的一个强连通定向图.

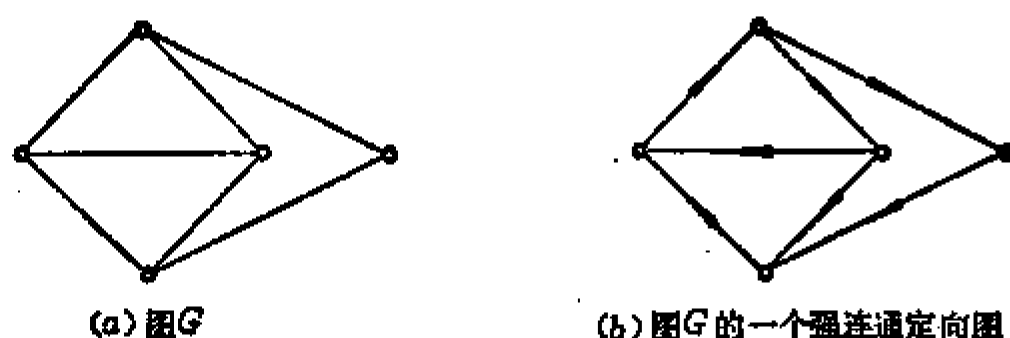

(a) 图G　　(b) 图G的一个强连通定向图

图 8.5

如果图G中有割边$e=uv$,G一定不能强连通定向. 事实上,如果把e的方向规定为从u到v,则G中没有从v到u的有向路;如果把e的方向规定为从v到u,则G中没有从u到v的有向路. 自然会提出问题,如果G没有割边,即G 2边连通,是否G总可以强连通定向呢?答案是肯定的,这就是下面的定理.

定理 8.1 设G是连通图,则G存在强连通定向的充分必要条件是G中没有割边.

证 前已说明,如果G有割边,则G一定不能强连通定向,因此只需证明充分性.

设G无割边. 由引理2.3,G的每一条边都在G中的一个圈上. 任取G中的一个圈C,任意规定C的一个绕行方向,C中的各条边都按所规定的绕行方向来定向,定向后的C显然是强连通的.

假设 G' 是 G 的子图，又已经给出 G' 的强连通定向. 如果 $G' \neq G$，因 G 连通，一定有 $e \in E(G)$，但 $e \notin E(G')$，且 e 至少有一个端点属于 $V(G')$. 因为 e 不是割边，它一定是 G 中的某一个圈 $\tilde{C}$ 上的一条边. 在 $\tilde{C}$ 的两个绕行方向中任意选定一个，对于 $E(\tilde{C}) \setminus E(G')$ 中的边，按这个绕行方向来定向；对于 $E(\tilde{C}) \cap E(G')$ 中的边，保持原先 G' 的定向. 这样一来，$G' \cup \tilde{C}$ 的每一条边都有了定向. 不难看出，这样定向的 $G' \cup \tilde{C}$ 强连通. 事实上，如果 $V(\tilde{C}) \subseteq V(G')$，由于 G' 强连通，$G' \cup \tilde{C}$ 一定强连通. 如果 $V(\tilde{C}) \setminus V(G') \neq \emptyset$，任取 $u \in V(\tilde{C}) \setminus V(G')$，根据 $E(\tilde{C}) \setminus E(G')$ 的定向规则，显然存在 $\tilde{C}$ 上的一段有向路 P，u 是 P 的内点，且除了起点 u' 和终点 u'' 之外，P 的其余的顶点都不属于 $V(G')$. 因此存在有向路 P_1 和 P_2. P_1 以 u 为起点，其终点 $u'' \in V(G')$；P_2 以 $u' \in V(G')$ 为起点，其终点是 u. 因为 G' 强连通，故 G' 中存在从 u'' 到 u' 的有向路 P_3，P_3P_2 是 $G' \cup \tilde{C}$ 中从 u'' 到 u 的有向路. 这即是说顶点 u 和顶点 u'' 强连通，因此 u 和 u'' 属于已经定向的 $G' \cup \tilde{C}$ 的同一个强连通分支，由于 G' 强连通，又 u 是 $V(\tilde{C}) \setminus V(G')$ 中的任意顶点，故按前述方式定向的 $G' \cup \tilde{C}$ 强连通. 不断施行以上的过程，G 中已强连通定向的部分一步一步地扩大，最后 G 的每一条边都有了定向，而定向后的 G 是强连通的. □

习　题

8.1.1　设 D 是有 n 个顶点 m 条弧的简单有向图，证明：

(*a*) 如果 D 连通，则 $n-1 \leqslant m \leqslant n(n-1)$；

(*b*) 如果 D 强连通，则 $n \leqslant m \leqslant n(n-1)$.

8.1.2　问简单图 G 能有多少种定向?

8.1.3　设 $f: V(D_1) \to V(D_2)$ 是有向图 D_1 和 D_2 的顶点集之间的双射. 如果对于 D_1 的任何一对顶点 u 和 v，D_1 中从 u 到 v 的弧的数目与 D_2 中从 $f(u)$ 到 $f(v)$ 的弧的数目相同，则称 f 是 D_1 和 D_2 间的一个同构对应. 如果

D_1 和 D_2 间有同构对应，则称 D_1 和 D_2 同构．把有向图 D 的每一条弧的方向都倒过来得到的图称为 D 的逆向图，记为 $\overleftarrow{D}$．试求一个有向图 D，使得 D 与 $\overleftarrow{D}$ 同构．

8.1.4　分别具体给出 $K_n(n\geqslant3)$，$K_{r,s}(r,s\geqslant2)$，使得该图的强连通定向．

8.1.5　证明可以对任何图 G 定向，使得定向后的图中的每一条有向路的长不超过 $\Delta(G)$（提示：任何图 G 的色数 $\chi(G)\leqslant\Delta(G)+1$）．

8.1.6　设有向图 D 连通，证明 D 强连通的充分必要条件是它的每一个块强连通．

8.1.7　设 $D_1,D_2,\cdots,D_m$ 是有向图 D 的强连通分支．设 $w_1,w_2,\cdots,w_m$ 是 m 个顶点，又若 D 中有从 D_i 的顶点到 D_j 的顶点的弧（$i\neq j$），则引一条从 w_i 到 w_j 的弧．这样得到的简单有向图称为 D 的凝缩图，记为 $\hat{D}$．证明 $\hat{D}$ 中不存在有向圈．

8.1.8　证明如果强连通有向图 D 中含奇圈，则 D 中必含有向奇圈．（提示：设 C 是 D 中的奇圈，选定 C 的绕行方向．设 C 上的弧 (u,v) 的方向与 C 的绕行方向不一致。由于 D 强连通，有从 v 到 u 的有向路 P_{vu}。考虑一切 P_{vu} 都是奇数长的有向路的情形．这时 D 中有奇数长的有向闭途径，由此说明 D 中有有向奇圈．）

8.1.9　设 D 是非平凡有向图．证明 D 强连通的充分必要条件是对于 $V(D)$ 的任何非空真子集 S，既有从 S 中的顶点到 $\bar{S}$ 中的顶点的弧，也有从 $\bar{S}$ 中的顶点到 S 中的顶点的弧．

8.2　有向欧拉图和竞赛图

如果 D 中有一个包含一切弧的有向闭迹，则称 D 为有向欧拉图，而这样的闭迹称为 D 的有向欧拉闭迹．如果 D 中有包含一切弧的有向迹，则称 D 为有向半欧拉图．显然，有向欧拉图都是有向半欧拉图．图 8.6(*a*)中画出的是一个有向欧拉图，而 8.6(*b*)是一个有向半欧拉图但却不是一个有向欧拉图．

显然，有向欧拉图中不可能包含两个或两个以上的非空连通分支．因此有向欧拉图只可能有一个非空的连通分支外加若干个



图 8.6

孤立顶点，所以在讨论有向欧拉图的时候，可局限于研究非空连通有向图的情形.

设 v 是有向图 D 的顶点，顶点 v 的入弧总数记为 $d_D^-(v)$，称为**入度**. 顶点 v 的出弧总数记为 $d_D^+(v)$，称为**出度**. 顶点 v 上的环既算成 v 的入弧，也算成 v 的出弧，以 $\delta^-(D)$、$\Delta^-(D)$、$\delta^+(D)$、$\Delta^+(D)$ 分别记 D 中顶点的**最小入度**、**最大入度**、**最小出度**和**最大出度**. 如果 (v,u) 是 D 中的弧，称 u 为顶点 v 的**出邻点**；如果 D 中有弧 (w,v)，称 w 为 v 的**入邻点**. 以 $N^+(v)$ 表示顶点 v 的一切出邻点的集合，$N^-(v)$ 表示 v 的一切入邻点的集合. $N^+(v)$ 和 $N^-(v)$ 分别称为顶点 v 的**出邻点集**和**入邻点集**. 如果不致混淆，将省略 D 而把 $A(D)$ 写为 A，$d_D^-(v)$ 写为 $d^-(v)$，$\Delta^+(D)$ 写为 Δ^+ 等等.

在第一章中曾证明握手引理(定理 1.1)，对于有向图来说有下面的.

定理 8.2(有向握手引理) 对于有向图 D 有

$$\sum_{v\in V} d^+(v) = \sum_{v\in V} d^-(v) = |A|$$

证 因 D 的每一条弧对 D 中顶点的出度的总和以及 D 中顶点的入度的总和分别贡献 1，因此定理显然成立. □

引理 8.3 如果有向图 D 满足

(1) 对一切 $v\in V$，$d^+(v)>0$ 或

(2) 对一切 $v\in V$，$d^-(v)>0$，

则 D 中一定存在有向圈.

证 由于两种情形的证明非常类似,我们只考虑(1)成立的情形. 从 D 中任一顶点 v_1 出发,因 $d^+(v_1)>0$,故一定有弧$(v_1,v_2)\in A(D)$. 如果 $v_2=v_1$,环(v_1,v_1) 是 D 中的有向圈;如果 $v_2\neq v_1$,因 $d^+(v_2)>0$,一定有弧$(v_2,v_3)\in A(D)$. 如果 $v_3=v_1$或 $v_3=v_2$,显然 D 中也出现了有向圈. 如果 v_3 与 v_1 和 v_2都不相同,则(v_1,v_2,v_3)是 D 中的有向路. 继续进行上述过程,因 D 中顶点的数目有限,必定存在顶点 v_k,使$(v_1,v_2,\cdots,v_k)$是D 中的有向路,并且存在弧(v_k,v_{k+1}),使得$v_{k+1}=v_l(1\leqslant l\leqslant k)$.这时$(v_l,v_{l+1},\cdots,v_k,v_l)$就是 D 中的一个有向圈. □

定理 8.4 非空连通有向图 D 是有向欧拉图的充要条件为

$$d^+(v)=d^-(v)\quad(\text{对一切}v\in V)$$

证 *必要性* 设 T 是 D 中的有向欧拉闭迹,从 T 上的任一顶点 v_0 出发沿 T 行进,再返回到 v_0. 因 D 是非空连通图,且 T 包含了 D 中的每一条弧,沿 T 行进的过程中必然经过 D 中的任一个顶点 $v\neq v_0$. 每当经过顶点 v 一次时,用到与 v 关联的两条弧,一条是顶点 v 的出弧,一条是顶点 v 的入弧. 又因 T 是有向欧拉闭迹,D 的每一条弧在 T 中出现一次且仅仅一次. 因此,如果 $v\neq v_0$,又 T 通过顶点v共k次,就有$d^+(v)=d^-(v)=k$. 又若沿 T 行进的过程中穿过 v_0 共 l 次,因最后还要返回到 v_0,故 $d^+(v_0)=d^-(v_0)=l+1$.

充分性 对 D 中弧的数目进行归纳. 当 D 中只有一条弧时,D 是一个环,因而是有向欧拉图. 考虑弧的数目大于 1 且每一个顶点的出度和入度相等的非空连通有向图 D.因 D 非空连通,故 D 中每一个顶点 v 都满足 $d^+(v)=d^-(v)>0$,由引理 8.3,D 中存在有向圈 C. 如果 C 包含 D 中的一切弧,C 就是有向欧拉闭迹,定理获证. 如果 D 中有不在C上的弧,$D-A(C)$不空并且每个顶点的出度和入度仍然相等.由归纳法的假定可知 $D-A(C)$

的每个非空连通分支 H 都是有向欧拉图。可以如下造出 D 的有向欧拉闭迹 T：从 C 上的一个顶点 v_0 出发沿 C 行进，当遇到 H 中的顶点 v 时，转而沿 H 中的有向欧拉闭迹行进再返回到顶点 v，继而沿 C 行进，一直到与 $D-A(C)$ 的下一个非空连通分支 H' 的顶点相遇时转而沿 H' 的有向欧拉迹行进，依此下去直到返回 v_0 为止。由于 D 是连通的，$D-A(C)$ 的每一个连通分支 H 都与 C 有公共点，故这样得到的有向闭迹显然是 D 的有向欧拉闭迹 T。□

推论 8.5　设 l 是正整数。连通有向图 D 是 l 条从 v_1 到 v_2 互无公共弧的有向迹的并的充分必要条件是：

(1) $d^+(v_1)-d^-(v_1)=d^-(v_2)-d^+(v_2)=l$, (8.1)

(2) $d^+(v)=d^-(v)\ (v\in V\setminus\{v_1,v_2\})$. (8.2)

证　由于从 v_1 到 v_2 的每一条有向迹对顶点 v_1 的出度的贡献比对入度的贡献多 1，对顶点 v_2 的入度的贡献比对出度的贡献多 1，又对任何顶点 $v\in V\setminus\{v_1,v_2\}$ 的出度的贡献等于对同一个顶点的入度的贡献，因此条件的必要性显然成立。

为了证明条件的充分性在 D 中添加 l 条弧 (v_2,v_1)，记所得的图为 D'。显然 D' 满足定理 8.4 的条件，从而其中存在有向欧拉闭迹。从有向欧拉闭迹中删去 l 条弧 (v_2,v_1)，余下来的就是 l 条从 v_1 到 v_2 的互无公共弧的有向迹，显然 D 是这 l 条有向迹的并。□

推论 8.6　如果有向图 D 满足条件(8.1)和(8.2)，则 D 中有 l 条从 v_1 到 v_2 的互无公共弧的有向路。

证　由(8.1)可知 v_2 有入弧 (u,v_2)，如果 $u\neq v_1$，由(8.1)与(8.2)知 u 有入弧 (t,u)，这样进行有限多步后一定到达 v_1。因此 D 中有从 v_1 到 v_2 的有向迹，故 v_1 与 v_2 属于 D 的同一个连通分支 H。把推论 8.5 用到 H 上可知 D 中有 l 条从 v_1 到 v_2 的互无公共弧的有向迹，由于每一条这样的迹中都包含从 v_1 到 v_2 的有向路，因此得到欲证的结论。□

推论 8.7　连通有向图 D 是有向半欧拉图而非有向欧拉图的充要条件是：

(1) D 中存在顶点 v_1 和 v_2，使得 $d^+(v_1)-d^-(v_1)=d^-(v_2)-d^+(v_2)=1$，

(2) $d^+(v)=d^-(v)$ $(v\in V\setminus\{v_1,v_2\})$。

证　这是推论 8.5 当 $l=1$ 的特殊情形. □

包含有向图中一切顶点的有向圈称为**有向汉密尔顿圈**. 如果有向图 D 中存在有向汉密尔顿圈，则称 D 为**有向汉密尔顿图**. 包含有向图中一切顶点的有向路称为**有向汉密尔顿路**，存在有向汉密尔顿路的有向图称为**有向半汉密尔顿图**. 显然有向汉密尔顿图必是有向半汉密尔顿图. 有向汉密尔顿图的研究是一个困难的课题，以下主要叙述与竞赛图有关的一些结果.

任何两个顶点之间都恰有一条弧相连的有向图称为**竞赛图**. 把 ν 阶完全图定向就得到 ν 阶竞赛图. 图 8.7 中画出的是一个 5 阶竞赛图.

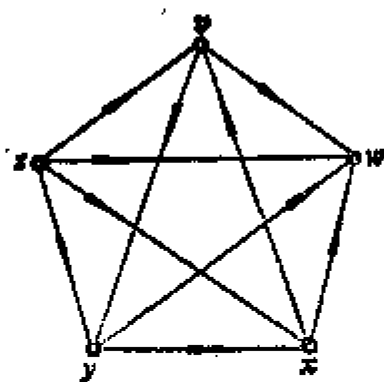


图 8.7

ν 阶竞赛图可以看成有 ν 个运动员参加的循环赛的比赛结果的表示图：运动员对应于图中的顶点. 如果运动员甲击败了运动员乙，则从代表甲的顶点引出一条到代表乙的顶点的弧. 例如图 8.7 中，v 胜 y 和 w，但 v 却败于 z 和 x.

因竞赛图中可能有这样的顶点，与这个顶点关联的各条弧全是关于这个顶点的出弧（例如图 8.7 中的顶点 z）或全是关于这个顶点的入弧（例如图 8.7 中的顶点 w），这样的竞赛图一定不是有向汉密尔顿图. 但瑞德(L. Rédei)和卡米翁(P. Camion)证明了下面的结果.

定理 8.8 每个竞赛图都是有向半汉密尔顿图.

证 对竞赛图的阶 ν 进行归纳. 当 $\nu\leqslant 3$ 时定理显然成立. 假定对阶不超过 ν 的竞赛图定理已成立. 设 T 是阶为 $\nu+1$ 的竞赛图. 任取 T 的顶点 v, $T-v$ 是 ν 阶竞赛图, 根据归纳法假定其中存在有向汉密尔顿路 $(v_1,v_2,\cdots,v_\nu)$. 顶点 v 和每一个顶点 v_i $(1\leqslant i\leqslant\nu)$ 之间都有弧相连, 分两种情况考虑.

(1) T 中有弧 (v,v_1) 或有弧 (v_ν,v). 此时 $(v,v_1,v_2,\cdots,v_\nu)$ 或 $(v_1,v_2,\cdots,v_\nu,v)$ 是 T 中的有向汉密尔顿路.

(2) T 中同时有弧 (v_1,v) 和 (v,v_ν). 令 i 是一切弧 (v,v_k) 中 k 的最小值 $(1<k\leqslant\nu)$. 于是 $(v_1,v_2,\cdots,v_{i-1},v,v_i,\cdots,v_\nu)$ 是 T 中的有向汉密尔顿路(参看图 8.8). □

定理 8.8 告诉我们, 每一个竞赛图都是有向半汉密尔顿图. 不难看出, 非强连通的竞赛图不可能是有向汉密尔顿图; 事实上, 有向汉密尔顿图一定强连通, 因为其中的任何两个顶点通过有向汉密尔顿圈可以互相到达. 很自然会提出问题, 是否强连通的竞

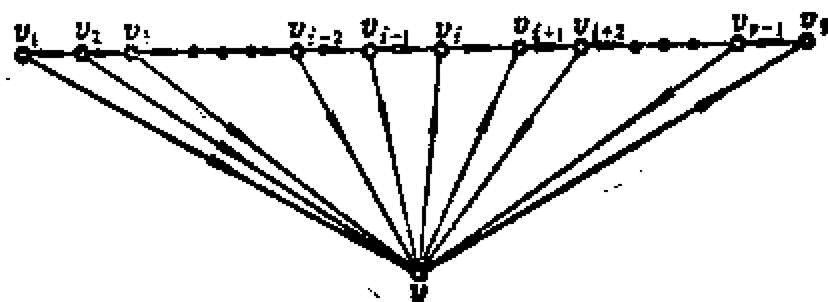


图 8.8

赛图一定是有向汉密尔顿图呢? 答案是肯定的, 穆恩(J.W.Moon) 在 1966 年证明了下面更强的结果.

定理 8.9 对任何满足 $3\leqslant k\leqslant\nu$ 的 k, 阶 $\nu\geqslant 3$ 的强连通竞赛图 T 的任何一个顶点都在 T 中的某一个有向 k 圈上.

证 设 u 是 T 中任意选定的顶点, 记 $R=N^+(u)$, $S=N^-(u)$. 因 T 强连通, 故 R 和 S 都非空, 并且一定有从 R 中的顶点 v

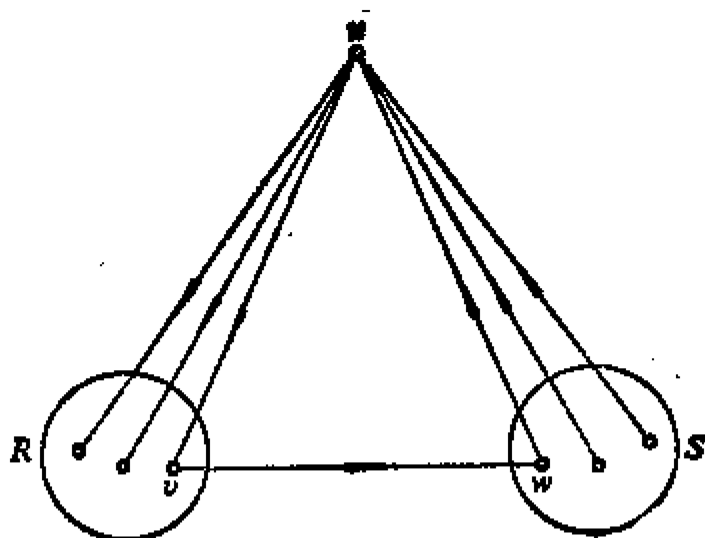


图 8.9

到S中的顶点w的弧(图 8.9)，(u,v,w,u)是T中包含顶点u的有向 3 圈.

如果T中存在含u的有向k圈$C=(v_0,v_1,v_2,\cdots,v_k)$，这里$v_0=v_k=u$，$3\leqslant k<\nu$，今证明$T$中一定存在含$u$的有向$k+1$圈. 分两种情形考虑.

(1) 存在顶点$v\in V(T)\setminus V(C)$，使得$N^+(v)\cap V(C)\neq\varnothing$，$N^-(v)\cap V(C)\neq\varnothing$. 由于$v$和$V(C)$的每一个顶点间都有弧相连，一定存在$C$上相邻的顶点$v_i$，$v_{i+1}$，使得$(v_i,v)$和$(v,v_{i+1})$都是$T$中的弧，这时$(v_0,v_1,\cdots,v_i,v,v_{i+1},v_{i+2},\cdots,v_k)$是含$u$的有向$k+1$圈.

(2) (1)中的情形不出现，即对于任何一个$v\in V(T)\setminus V(C)$，要么v与每一个$v_j(1\leqslant j\leqslant k)$间的弧都以$v$为首，记这样的$v$的集合为$R$；要么$v$与每一个$v_j(1\leqslant j\leqslant k)$间的弧都以$v$为尾，记这样的$v$的集和为$S$. 因$T$强连通，$R$和$S$都非空，且一定有尾在$R$中首在$S$中的弧$(v,w)$，$(v_0,v,w,v_2,v_3,\cdots,v_{k-1},v_0)$就是含$u$的有向$k+1$圈(参看图 8.10). □

在推论 2.15 中我们证明了迪拉克的结果：如果简单图G的

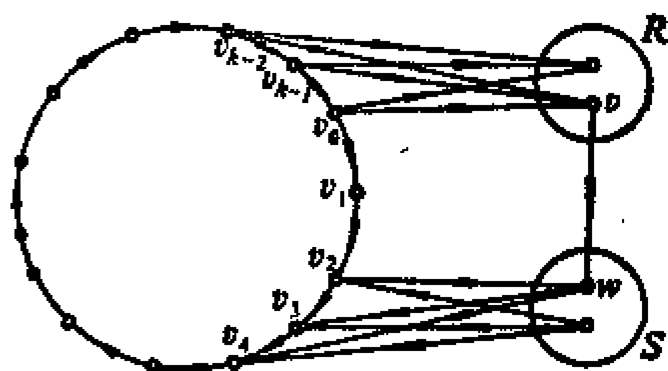


图 8.10

阶 $\nu\geqslant 3$. 又若 $\delta(G)\geqslant\nu/2$, 则 G 是汉密尔顿图, 下面的定理把迪拉克的上述结果推广到有向图, 它是古依那-乌里(Ghouila-Houri) 1960 年得到的结果的特殊情形.

定理 8.10 设 D 是阶 $\nu\geqslant 3$ 的简单有向图, 又 $\min\{\delta^+,\delta^-\}\geqslant\nu/2$, 则 D 中存在有向的汉密尔顿圈.

证 首先说明 D 中有长度 $>\nu/2$ 的有向圈. 为此考虑 D 中最长的有向路 $P=(u_1,u_2,u_3,\cdots,u_k)$, 因 P 最长, 故 $N^-(u_1)\subseteq\{u_2,u_3,\cdots,u_k\}$. 由于 D 是简单有向图, $|N^-(u_1)|=d^-(u_1)\geqslant\delta^-$. 一定存在 u_j, 满足 $2\leqslant j\leqslant k$, $j\geqslant\delta^-+1$, 使得 $(u_j,u_1)\in A(D)$. 于是 $(u_j,u_1,u_2,\cdots,u_{j-1},u_j)$ 是 D 中的有向圈, 它的长 $=j\geqslant\delta^-+1>\nu/2$.

现在用反证法来证明定理 8.10, 如果 D 不含有向的汉密尔顿圈, 设 $C=(v_1,v_2,\cdots,v_l,v_1)$ 是 D 中的一个最长的有向圈, 显然 $\nu/2<l<\nu$. 设 P 是 $D-V(C)$ 中最长的有向路, P 的起点为 u, 终点为 v, 其长为 m(u 和 v 可能重合, 这时 m 为零), 显然

$$\nu\geqslant l+m+1 \tag{8.3}$$

又因 $l>\nu/2$, 从而

$$m<\nu/2 \tag{8.4}$$

令 $S=\{i\,|\,1\leqslant i\leqslant l, (v_{i-1},u)\in A(D)\}$, $T=\{i\,|\,1\leqslant i\leqslant l,\ (v,v_i)\in$

$A(D)\}$，并约定 $v_0=v_l$。先指出，$S\cap T=\varnothing$。令 $C_{i,k}$ 代表 C 中以 v_i 为起点，v_k 为终点的那一段有向路。如果 $S\cap T\neq\varnothing$，设 $j\in S\cap T$。则 D 中包含有向圈 $C_{j,j-1}(v_{j-1},u)P(v,v_j)$（表示从 v_j 出发沿有向圈 C 至 v_{j-1}，经弧 (v_{j-1},u) 到 u，再沿有向路 P 到 v，然后经由弧 (v,v_j) 返回到 v_j），其长为 $l+m+1>l$，这与 D 中最长的有向圈的长度为 l 的假定矛盾（参看图8.11）。

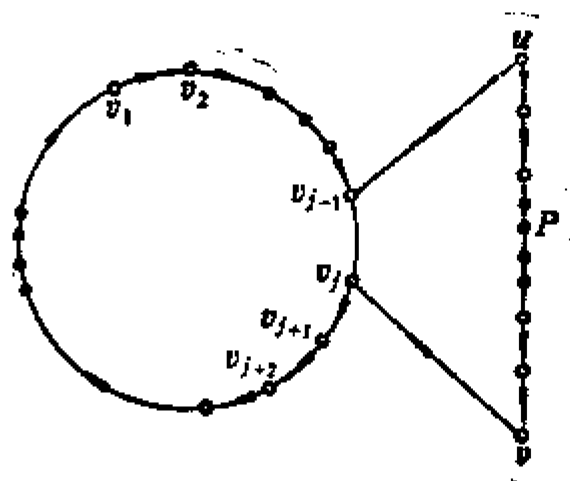


图 8.11

因 P 是 $D-V(C)$ 中最长的有向路，$N^+(v)\subseteq V(C)\cup V(P)$。因 v 含于 $V(C)$ 中的出邻点的个数恰好等于 $|T|$，故 $d_D^+(v)=|T|+d_P^+(v)$，这里 $d_P^+(v)$ 表示 v 的包含于 $V(P)$ 中的出邻点的个数。因 $d_D^+(v)\geqslant\delta^+\geqslant\nu/2$，$d_P^+(v)\leqslant m$，故

$$|T|\geqslant\nu/2-m \tag{8.5}$$

完全类似可证

$$|S|\geqslant\nu/2-m \tag{8.6}$$

由(8.4)以及(8.5)和(8.6)可知 T 和 S 都不空，把(8.5)和(8.6)相加并利用(8.3)，

$$|S|+|T|\geqslant\nu-2m\geqslant l-m+1$$

又因 $S\cap T=\varnothing$，故

$$|S\cup T|=|S|+|T|\geqslant l-m+1 \tag{8.7}$$

由于 S 和 T 互不相交且都不空，一定存在正整数 i 和 k，使得 $i\in S$，

$i+k\in T$，且

$$i+j\notin S\cup T \quad (1\leqslant j\leqslant k-1) \tag{8.8}$$

这里相加表示关于模 l 相加. 上式中允许 $k=1$的情形，这时$\{i+j;1\leqslant j\leqslant k-1, k=1\}$是空集.

由(8.7)和(8.8)可知 $k\leqslant m$，于是有向圈 $C_{i+k,i-1}(v_{i-1},u)P(v,v_{i+k})$的长为$l-k+m+1\geqslant l+1$，这与 C 是 D 中最长有向圈的假设相矛盾. □

由定理8.10可以推出推论2.15，为此只需把推论2.15中图 G 的每一条边用与这条边的顶点相同但方向相反的两条弧来代替，这样得到的有向图 D 满足定理8.10的条件，从而 D 中存在有向汉密尔顿圈. 不难看出，D 中的有向汉密尔顿圈对应于 G 中的汉密尔顿圈，从而证明了推论2.15.

习　题

8.2.1　设有向图 D 中无有向圈. 证明：

(a) $\delta^-(D)=0$；

(b) 可以把 D 的顶点编号排列成 $v_1,v_2,\cdots,v_\nu$，使得以顶点$v_i(1\leqslant i\leqslant\nu)$为首的一切弧的尾属于顶点集$\{v_1,v_2,\cdots,v_{i-1}\}$.

8.2.2　以 $\overleftarrow{D}$ 记D的逆向图(习题8.1.3)

(a) 证明：(1) $\overleftarrow{\overleftarrow{D}}=D$；(2) $d^+_{\overleftarrow{D}}(v)=d^-_D(v)$；(3) 在 $\overleftarrow{D}$ 中可以从顶点 v 到达顶点 u 的充分必要条件是在D中可以从 u 到达 v.

(b) 用本题(a)中的(2)和习题8.2.1中的(a)证明若D中无有向圈，则$\delta^+(D)=0$.

8.2.3　设D是简单有向图且$\max\{\delta^-,\delta^+\}=k$. 证明：

(a) D中有长度$\geqslant k$的有向路；

(b) 又若$k>0$，则D中有长度$\geqslant k+1$的有向圈.

8.2.4　设 u 和 v 是有向图中的任意两个顶点，若不能从 u 到达 v，就一定能够从 v 到达 u，则称 D 是**单边有向图**. 证明单边有向图中一定有有向支撑途径. (提示：考虑 D 中顶点数最多的有向途径，参考定理8.8的证明方

法.)

8.2.5 证明可以对任何图 G 定向，使得定向图 D 对一切 $v\in V(D)$ 满足

$$|d^+(v)-d^-(v)|\leqslant 1$$

8.2.6 证明任何竞赛图要么自身是强连通图，要么改变其中某条边的定向后成为强连通图。

8.2.7 只有出弧的顶点称为**发点**，只有入弧的顶点称为**收点**。证明竞赛图中的发点和收点最多各有一个。

8.2.8 证明竞赛图 T 中一定有这样的顶点 v，从 v 出发经过长为 1 或 2 的有向路可以到达 T 中任何其它的顶点 u。(提示：取 T 中出度最大的顶点为 v.)

8.2.9 设 T 是竞赛图，证明

$$\sum_{v\in V(T)} d^{+2}(v)=\sum_{v\in V(T)} d^{-2}(v) \qquad (8.9)$$

(提示：改变 T 中一条弧的方向之后(8.9)式不变)。

8.2.10 设 T 是竞赛图。如果当 (u,v) 和 (v,w) 都是 T 的弧，就有 (u,w) 是 T 的弧，则称 T 是**可传递的**。证明可传递的非平凡竞赛图一定不强连通且其中的有向汉密尔顿路唯一。

8.2.11 竞赛图的顶点 v 的出度称为顶点 v 的**得分**。把竞赛图各个顶点的得分按非降顺序排列而得到的序列称为该竞赛图的**得分向量**。例如图 8.7中的竞赛图的得分向量是(0,2,2,2,4)。证明如果 $(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 是竞赛图 T 的得分向量，则：(a) $s_1+s_2+\cdots+s_n=\frac{1}{2}n(n-1)$；(b) 对任何 k，$1\leqslant k\leqslant n-1$，$s_1+s_2+\cdots+s_k\geqslant\frac{1}{2}k(k-1)$，又不等式对一切 k 严格成立的充分必要条件为 T 强连通；(c) 对 $1\leqslant k\leqslant n$，$\frac{1}{2}(k-1)\leqslant s_k\leqslant\frac{1}{2}(n+k-2)$ $\left(\text{提示：}s_k+s_{k+1}+\cdots+s_n\leqslant(n-k+1)(k-1)+\binom{n-k+1}{2}\right)$；(d) T 传递的充分必要条件是对一切 k，$s_k=k-1$。

8.2.12 设 T_n 是 n 阶竞赛图，又 $C(T_n)$ 表示 T_n 中长为 3 的有向圈的

个数．设$(s_1,s_2,\cdots,s_n)$是T_n的得分向量．证明，

$$C(T_n)=\binom{n}{3}-\sum_{i=1}^{n}\binom{s_i}{2}=\frac{1}{24}(n^3-n)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(s_i-\frac{1}{2}(n-1)\right)^2$$

由此说明若n为奇数，$C(T_n)\leqslant\frac{1}{24}(n^3-n)$，若$n$为偶数，$C(T_n)\leqslant\frac{1}{24}(n^3-n)-\frac{n}{8}$．

8.3 计算机磁鼓的设计问题

这一节给出有向欧拉图的一个实际应用．磁鼓可以抽象看成一个圆环，环面等分成2^n格，每一格分别由绝缘材料或导电材料构成．沿环面一个接一个放置了k个触头，它们分别与环面上的k个格相接触．当触头接触的那一格是导体时，触头中有电流通过；当触头接触的那一格是绝缘体时，触头中无电流通过．如果我们用一个触头中有电流或无电流通过的状态来分别表示二进制的数字1或0，那么一列k个触头的一个状态就表示一个k位的二进制数，当把圆环旋转一格时，各个触头接触的格发生了变化，因而所表示的二进制数也就发生了变化．圆环共分成2^n格，故k个触头的接触方式也有2^n种，但是2^n种接触方式中有一些可能表示同一个二进制的数．图8.12中画出了$n=4,k=4$的情形．图中画出的情况触头输出的信号为0101，如果圆环沿顺时针方向旋转一格，输出的信号将是1010，再旋转一格输出的信号又是0101．

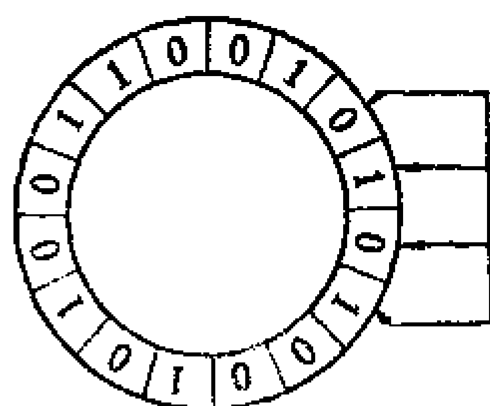


图 8.12

如果触头数较少，输出的不同的信号的数目也会比较少，例如两个触头最多只能输出00，01，10，11四种信号．一个自然的问题是：至少要多少个触头才能使2^n种接触状态输出的二进制信号

全部不同？首先，k 个触头最多能产生 2^k 个不同的二进制信号，因此，自然要求 $2^k \geqslant 2^n$，即$k \geqslant n$．以下说明，只要$k=n$，即只需n个触头，总可以适当安排环面上的 2^n格的绝缘性与可导性，使得输出的 2^n 个信号全不同．

考虑 2^{n-1} 个顶点的有向图，这 2^{n-1} 个顶点用 $n-1$位的2进制数 $p_1p_2\cdots p_{n-1}$来表示，每一个p_i 可取 0 或 1．从$p_1p_2\cdots p_{n-1}$引两条分别到$p_2p_3\cdots p_{n-1}1$和$p_2p_3\cdots p_{n-1}0$ 的出弧，把相应的弧标记为 $p_1p_2\cdots p_{n-1}1$ 和 $p_1p_2\cdots p_{n-1}0$．又分别从 $0p_1p_2\cdots p_{n-2}$和 $1p_1p_2\cdots p_{n-2}$ 各引一条弧到 $p_1p_2\cdots p_{n-1}$，把相应的弧标记为$0p_1p_2\cdots p_{n-1}$和 $1p_1p_2\cdots p_{n-1}$．这样就得到一个有向图D_n．其顶点数为2^{n-1}，弧数为2^n，每一个顶点的出度和入度都是2，又 2^n条弧分别由 2^n 个 n 位 2 进制数表示．首先不难看出，对于D_n中任意两个顶点 v 和 v'，都有以 v 为起点 v'为终点的有向路．例如在D_4 中对于 $v=010$，$v'=110$，只需去掉 v 的首位数字 0，在后面添加 v' 的首位数字 1，即由 v 移到 $v_1=101$．再去掉 v_1 的首位数字1，在后面添加 v' 的第 2 位数字 1，即由 v_1 移到 $v_2=011$．最后去掉 v_2 的首位数字 0，在后面添加 v' 的第 3 位数字 0，即由v_2 移到 v'．于是(v,v_1,v_2,v')就是D_4 中以 v 为起点，v'为终点的有向路．因此D_n 是连通有向图．由定理8.4可知D_n是有向欧拉图，它的有向欧拉闭迹中的弧的标记依顺序给出 2^n个 n 位 2 进制数．由于 D_n 中任一条长为 n 的有向路上依顺序的各条弧的首位数字恰好组成了这条有向路上第一条弧上的 n 位数，因此依顺序取这 2^n 个 n 位 2 进制数的首位数，按反时针方向用这些数标记环面上的 2^n 格，标记为 1 的格用导电材料，标记为 0 的格用绝缘材料，这就给出了所需的答案．以 $n=4$的情形为例，D_4的图如图 8.13所示．

D_4中的一个有向欧拉闭迹由图8.13中从 a_1 到 a_{16} 各条弧首尾相连构成，这些弧的标记如下：

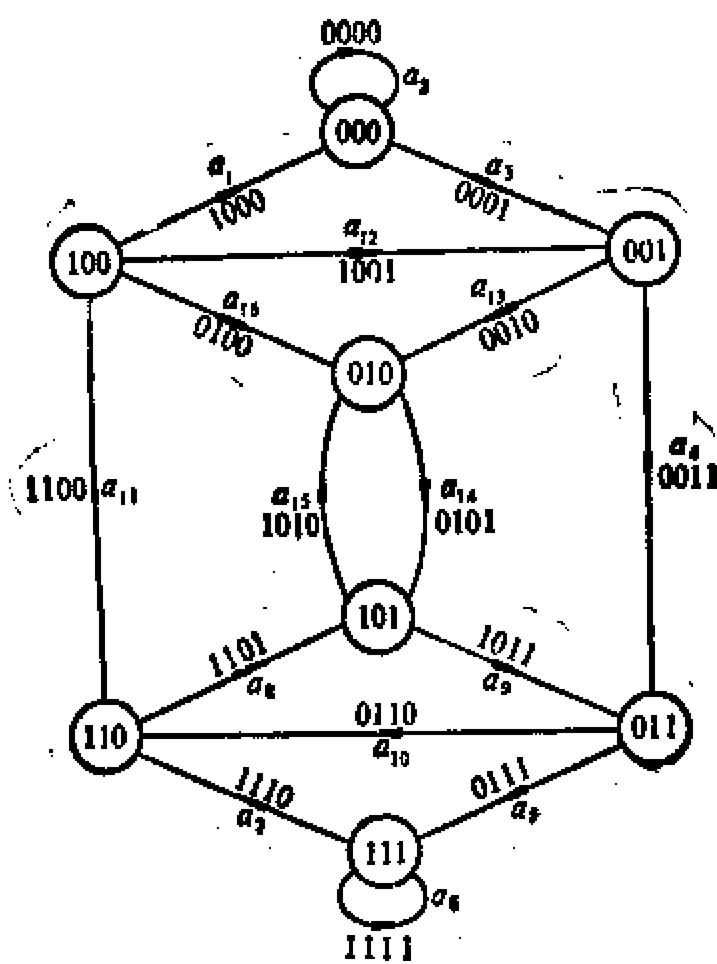


图 8.13

a_1 1000

a_2 0000

a_3 0001

a_4 0011

a_5 0111

a_6 1111

a_7 1110

a_8 1101

a_9 1011

a_{10} 0110

a_{11} 1100

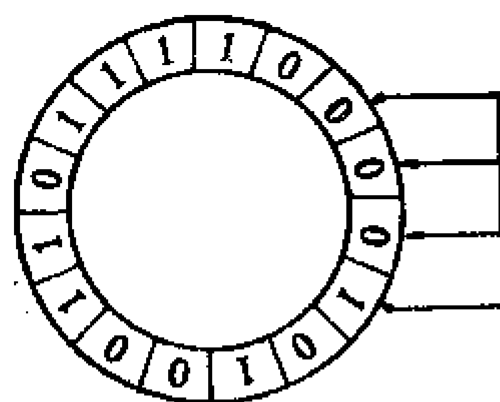


图 8.14

a_{12} 1001

a_{13} 0010

a_{14} 0101

a_{15} 1010

a_{16} 0100

依顺序取这些二进制数的首位数在环面上按反时针方向依顺序填入格中，所得的结果如图8.14所示，它给出了 $n=4$ 情形的解.

习 题

8.3.1 把7个0和7个1均匀地排在圆环上，使得除0000和1111之外的每一个4位2进制数都是圆环上某相继的四位数（提示：考察图8.13，去掉弧 a_1 和 a_8）。

8.3.2 设有 n 个字母，以不同的顺序排列一共可以组成 n^4 个各含4个字母的字。要求用 n^4 个字母均匀排在圆环上，使得每个字母恰好出现 n^3 次，并且每一个含4个字母的字都恰好在圆环上某相继的4个位置出现一次。

参 考 文 献

Camion, P. (1959). Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets. C. R. Acad. Sci. Paris, 249,2151—52

Ghouila-Houri, A. (1960). Une condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien. C. R. Acad. Sci. Paris, 251,495—97

(关于 Ghouila-Houri 的结果可参阅，

Berge, C. (1985). Graphs, North Holland, Amsterdam, pp 193—200)

Moon, J. W. (1966). On subtournaments of a tournament. Canad. Math. Bull., 9,297—301

Redei, L. (1934). Ein kombinatorischer Satz. Acta Litt. Sci. Szeged, 7,39—48

第九章　网　络　流

9.1　流与截

考虑图 9.1 表示的交通网. v,x,y,z,w 是五个城镇，连接它们的各条弧代表单向行驶的公路，每条弧旁标记的数字表示相应弧的容量. 例如在弧 (x,v) 旁标记了 4，表示沿弧 (x,v) 每单位时间内(例如每天)最多通过(例如说) 4 千辆汽车. 我们的问题是：单位时间内最多能有多少辆车从 x 出发经过交通网到达 y？可以给图 9.1 其它的种种解释. 例如可以把弧看成运输线路，而箭头所示的方向表示货物的运送方向，弧旁的数字表示相应的线路可承受的最大货运量. 这时图 9.1 代表运输货物的网络. 现在的问题是单位时间内最多能有多少货物通过网络由 x 运送到 y？

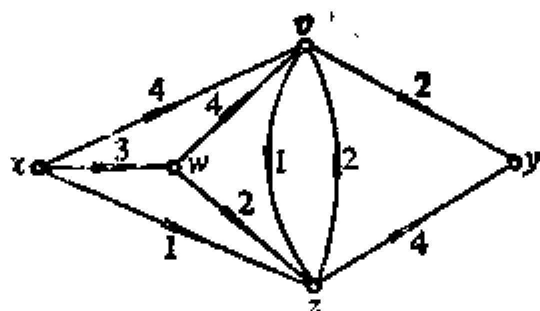


图 9.1

现代社会可以说在很大程度上是通过各种网络（例如运输网络，通讯网络，产品的调运分配网络等等）来管理与控制的. 因此，对网络从数学上进行分析是一项十分重要的课题. 网络除了有广泛的实际应用外，在理论上也有重大的意义. 有些难处理的理论问题，用网络来研究十分简洁、清晰. 这一章将介绍有关网络的数学理论并用它来证明有关图的连通性的门格尔定理.

网络 N 是指具有以下结构的有向图 D：

(1) D 中取定了顶点 x 和 y，x 称为 N 的源，y 称为 N 的汇；

(2) 在 D 的弧集 A 上定义了非负整数值函数 c，c 称为网络 N

的容量函数．c 在每一条弧上的值称为这条弧的容量．

因此网络N是规定了源和汇且每一条弧上都给定了非负整数权的赋权有向图．网络中既不是源也不是汇的顶点称为中间顶点，中间顶点的集合记为 I．如果 $S\subseteq V$，记$V\setminus S$为$\bar{S}$．如果 S 和T是网络N的顶点集V 的子集，则尾在S内首在T内的N中的弧的全体记为(S,T)．还采用下面的记号：如果 f 是定义在N的弧集 A 上的函数，又若 $K\subseteq A$，记$f(K)=\sum\limits_{a\in K}f(a)$．为了书写简便，当$K=(S,\bar{S})$，把 $f((S,\bar{S}))$简记为 $f^{+}(S)$，当$K=(\bar{S},S)$，把$f((\bar{S},S))$简记为$f^{-}(S)$．当$S=\{v\}$时，进一步把 $f^{+}(\{v\})$和$f^{-}(\{v\})$ 简记为$f^{+}(v)$和 $f^{-}(v)$．

网络N中的流是指定义在N的弧集A上的整数值函数 f，满足

(1) 对任何$a\in A$，约束条件

$$0\leqslant f(a)\leqslant c(a) \tag{9.1}$$

成立，这里 $c(a)$是弧 a 的容量；

(2) 对任何 $v\in I$，守恒条件

$$f^{+}(v)=f^{-}(v) \tag{9.2}$$

成立．

$f(a)$ 称为流 f 在弧 a 上的流量．条件(1)表示每一条弧上的流量不可能超过弧的容量；条件(2)表示流进每一个中间顶点 v 的总流量与从 v 流出的总流量相等．任何网络中都至少有一个流存在，即零流，也就是每一条弧上的值都等于零的流．

设S是网络N的顶点集的一个子集，又f是N中的一个流．称$f^{+}(S)-f^{-}(S)$为流出S的流量，$f^{-}(S)-f^{+}(S)$为流入S的流量．

把(9.2)两端对一切$v\in I$求和，可得

$$\sum_{v\in I} f^+(v) = \sum_{v\in I} f^-(v) \tag{9.3}$$

如果 $a=(v_1,v_2)$是N中的一条弧，又 v_1和 v_2 都是中间顶点．这时(9.3)左端出现$f(a)$，右端也出现 $f(a)$．把(9.3)两端一切这样的相同的项都约去之后得到

$$f^-(x)+f^-(y)=f^+(x)+f^+(y)$$

即

$$f^+(x)-f^-(x)=f^-(y)-f^+(y) \tag{9.4}$$

等式(9.4)表明流出源 x 的流量等于流入汇 y 的流量．

(9.4)中的值称为流 f 的值，记为$\mathrm{Val}f$．如果N中不存在流 f' 满足$\mathrm{Val}f'>\mathrm{Val}f$，则我们说流 f 是N中的最大流．

设N是以 x 为源，y 为汇的网络．且 S 是N的顶点集的一个子集．如果$x\in S$，$y\in \bar{S}$，则形如$(S,\bar{S})$的弧的全体称为网络N的截，通常用K来表示．截K的容量指截K中各条弧的容量的和，记为$\mathrm{Cap}K$，即

$$\mathrm{Cap}K=\sum_{a\in K} c(a)$$

如果N中不存在截 K' 使得 $\mathrm{Cap}K'<\mathrm{Cap}K$，则我们说截$K$是$N$中的最小截．

设 a 是网络N中的一条弧，如果 $f(a)=0$，称 a 为f零弧；如果$f(a)>0$，称 a 为 f 正弧；如果$f(a)<c(a)$，称 a 为 f 非饱和弧；如果$f(a)=c(a)$，称 a 为 f 饱和弧．

图 9.2 给出图 9.1 的网络中的一个流 f．每条弧旁有两个数，左边一个(粗体字)是相应弧上的流量，右边的一个是弧的容量．$\mathrm{Val}f=6$．容易看出这是网络中的最大流．由粗线条标出的四条弧是一个截，其容量为 14．弧(x,z)是 f 饱和弧，(x,v)是 f 非饱和弧，(z,v)是 f 零弧，(v,y)为 f 正弧．

引理 9.1　对于网络中的任何流 f 和任何截$(S,\bar{S})$，都有

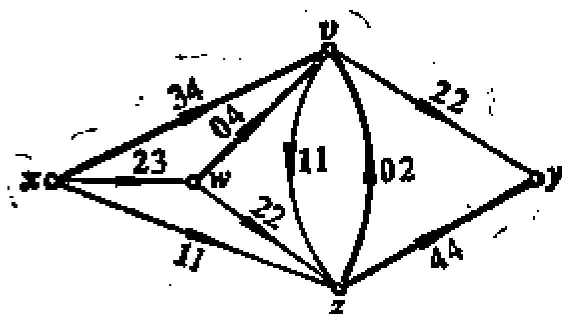


图 9.2

$$\mathrm{Val}f=f^{+}(S)-f^{-}(S) \tag{9.5}$$

证 由于

$$f^{+}(v)-f^{-}(v)=\begin{cases}\mathrm{Val}f & v=x\\ 0 & v\in S\backslash\{x\}\end{cases}$$

把上面的各个等式关于S中的顶点求和并化简就得到等式(9.5)。□

式(9.5) 的含义是：流 f 的值等于从 S 中流出的流量．这是一个很自然的结论．

定理 9.2 设 f 是网络 N 中的任何一个流，$K=(S,\bar{S})$ 是 N 中任何一个截，则

$$\mathrm{Val}f\leqslant \mathrm{Cap}K \tag{9.6}$$

又(9.6)成立等式的充要条件为$(S,\bar{S})$中的每一条弧是 f 饱和弧且$(\bar{S},S)$中的每一条弧是 f 零弧．

证 由(9.1)可知$f^{+}(S)\leqslant \mathrm{Cap}K$，又因 $f^{-}(S)\geqslant 0$，故由(9.5)

$$\mathrm{Val}f=f^{+}(S)-f^{-}(S)\leqslant \mathrm{Cap}K$$

(9.6)成立等式的充要条件是 $f^{+}(S)=\mathrm{Cap}\,K$并且 $f^{-}(S)=0$，即$(S,\bar{S})$中的每一条弧是 f 饱和弧且 $(\bar{S},S)$ 中的每一条弧是 f 零弧．□

因网络中截的数目有限，故一定存在最小截；又因任何流 f 的值 $\mathrm{Val}\,f$ 是非负整数，由不等式(9.6)，网络中的流可以取到的值只有有限多个，故一定有最大流．

设 f^{*}是 N 中的最大流，$\tilde{K}$是 N 中的最小截．因(9.6)对一切

f和K成立，故

$$\mathrm{Val} f^* \leqslant \mathrm{Cap} \tilde{K} \tag{9.7}$$

即网络中流的最大值不可能超过截的最小容量.

推论 9.3 设f是网络N中的一个流而K是N的一个截，若

$$\mathrm{Val}\ f = \mathrm{Cap} K \tag{9.8}$$

则f是最大流而K是最小截.

证 设f^*是N中的最大流，$\tilde{K}$是最小截. 有不等式

$$\mathrm{Val}\ f \leqslant \mathrm{Val}\ f^* \leqslant \mathrm{Cap} \tilde{K} \leqslant \mathrm{Cap} K$$

再由(9.8)式可知

$$\mathrm{Val} f = \mathrm{Val}\ f^* = \mathrm{Cap} \tilde{K} = \mathrm{Cap} K$$

故f是最大流，K是最小截. □

推论 9.3 告诉我们，如果能找到流f和截K使(9.8)成立，则f是最大流、K是最小截. 下一节中将给出一个算法，由它可以找出满足(9.8)的f和K，从而用构造方法求出最大流和最小截.

习　　题

9.1.1 找出图 9.3 中的网络的一切可能的流和截，问最大流的值和最小截的容量是多少？

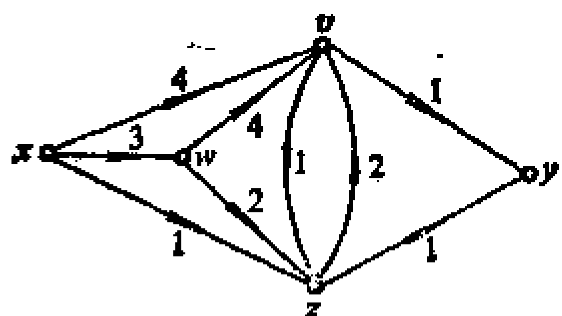


图 9.3

9.1.2 如果网络N中不存在从源x到汇y的有向路，证明其中最大流的值和最小截的容量都为零.

9.1.3 设网络N中每一条弧的容量为正数，又D是N中若干弧的集合，如果新网络$N-D$中无值为正数的流，证明D中一定包含截.

9.1.4 如果$(S,\bar{S})$与$(T,\bar{T})$都是网络N中的最小截. 证明$(S\cup T,\overline{S\cup T})$与$(S\cap T,\overline{S\cap T})$也是最小截. (提示: $\mathrm{Cap}(S\cup T,\overline{S\cup T})\leqslant \mathrm{Cap}(S,\bar{S})+\mathrm{Cap}(T,\bar{T})-\mathrm{Cap}(S\cap T,\overline{S\cap T})$.)

9.2 最大流最小截定理

设f是网络N中的流, P是N中的一条路, 由P的起点经过P到它的终点自然赋与其上每条边一个定向, 称为由P赋与的方向. 如果P中的弧a的方向与由P赋与的方向一致, 称a是P的**同向弧**; 否则称a是P的**逆向弧**. 关于P定义数值

$$l(P)=\min_{a\in P} l(a) \tag{9.9}$$

这里

$$l(a)=\begin{cases} c(a)-f(a) & \text{如果 } a \text{ 是 } P \text{ 的同向弧} \\ f(a) & \text{如果 } a \text{ 是 } P \text{ 的逆向弧} \end{cases} \tag{9.10}$$

由于关于P中的一切弧a都有$l(a)\geqslant 0$, 故$l(P)\geqslant 0$.

当$l(P)>0$时, 称路P为**f非饱和路**; 当$l(P)=0$时, 称路P为**f饱和路**. f非饱和路P的每一个同向弧都是f非饱和弧, 而每一条逆向弧都是f正弧. 从源x引向汇y的非饱和路称为**f可增路**. 例如图 9.4 的网络中用粗线条画出的路就是f可增路.

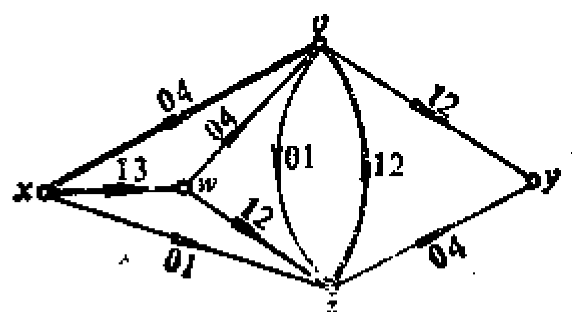


图 9.4

如果存在f可增路P, f就不是最大流. 事实上, 在N中可定义新流$\hat{f}$如下

$$\hat{f}(a)=\begin{cases} f(a)+l(P) & \text{如果 } a \text{ 是 } P \text{ 的同向弧} \\ f(a)-l(P) & \text{如果 } a \text{ 是 } P \text{ 的逆向弧} \\ f(a) & \text{其它情形} \end{cases} \tag{9.11}$$

以下说明 $\hat{f}$ 确实是一个流．由 $l(P)$的定义，对于P的同向弧 a

$$0<\hat{f}(a)=f(a)+l(P)\leqslant f(a)+(c(a)-f(a))=c(a)$$

又若 a 是关于P的逆向弧

$$0\leqslant\hat{f}(a)=f(a)-l(P)<f(a)\leqslant c(a)$$

因此，对于N中的任何一条弧 a，$\hat{f}(a)$满足(9.1)．因$\hat{f}$只在 f 可增路 P 上才和 f 不同，为了检验守恒条件(9.2)是否对一切 $v\in I$ 成立，只需对 f 可增路 P 的中间点检验即可．对于这样的顶点，共有如图 9.5 中画出的四种可能性．为了清楚起见，图 9.5 中只画出与 v 关联的各条弧中属于可增路 P 的弧．又假定 P 从源 x 到汇 y 的方向在图中是从左到右．

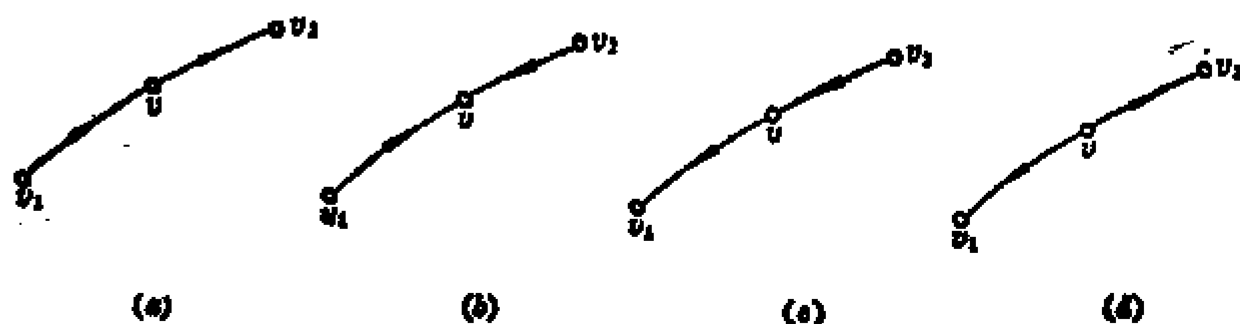


图 9.5

不难看出，对于图 9.5 中的任何一种情形 $\hat{f}$ 都在顶点 v 满足守恒条件．并且无论可增路 P 中与源 x 关联的弧是 x 的出弧或入弧，总有

$$\mathrm{Val}\,\hat{f}=\mathrm{Val}\,f+l(P) \tag{9.12}$$

$\hat{f}$ 称为关于可增路 P 的**修改流**．

定理 9.4　网络 N 中的流 f 是最大流的充要条件是 N 中不含 f 可增路．

证　如果 N 中有 f 可增路 P，由(9.12)可知 f 关于 P 的修改

流$\hat{f}$满足$\mathrm{Val}\hat{f}>\mathrm{Val}f$,故$f$不是最大流. 这就证明了必要性.

反之,假定N不含f可增路,以S表示和源x可用f非饱和路连接的全部顶点. $x\in S$.又因不存在f可增路,故$y\in\bar{S}$.于是$K=(S,\bar{S})$是N的一个截.

今说明$(S,\bar{S})$中的弧全是f饱和弧,$(\bar{S},S)$中的弧全是f零弧. 设(u,v)是$(S,\bar{S})$中的一条弧. 根据S的定义,存在以x为起点u为终点的f非饱和路P.如果(u,v)是f非饱和弧, P添上(u,v)是从x到v的f非饱和路,从而$v\in S$,这与$v\in\bar{S}$矛盾. 因此(u,v)是f饱和弧. 可以类似证明$(\bar{S},S)$中的弧全是f零弧,因此由(9.5)式可知

$$\mathrm{Val}f=f^{+}(S)-f^{-}(S)=\mathrm{Cap}K$$

由推论 9.3 可知f是最大流,K是最小截. □

利用定理 9.4,我们可以从网络N中任何一个流f(例如零流)出发,去求N的最大流. 如果N中存在f可增路P,因$l(P)>0$是整数,故f关于可增路P的修改流$\hat{f}$满足$\mathrm{Val}\hat{f}=\mathrm{Val}f+l(P)\geq\mathrm{Val}f+1$. 如果$N$中还存在$\hat{f}$可增路,于是又有$\hat{f}$的修改流$\hat{\hat{f}}$,$\mathrm{Val}\hat{\hat{f}}\geq\mathrm{Val}\hat{f}+1$. 由不等式(9.6)可以看出,这样的过程不能永远进行下去,因而经过有限步之后一定会得到这样的一个流f^{*},N中不再存在f^{*}的可增路. 从定理 9.4 的证明过程可以看出,存在截$\tilde{K}$,使得$\mathrm{Val}f^{*}=\mathrm{Cap}\tilde{K}$.$f^{*}$是最大流,$\tilde{K}$是最小截. 因此我们证明了由福特(L.R.Jr.Ford)和福克森(D.R.Fulkerson)在1956年得到的下述定理.

定理 9.5(最大流最小截定理) 任何网络N中最大流的值等于最小截的容量.

还需注意的是,最大流和最小截一般不唯一,同一网络中通常都存在若干个不同的最大流和最小截.

定理 9.5 的证明过程同时提供了求网络中最大流的实用算法,这个算法是福特和福克森在 1957 年提出的,称为标数算法.

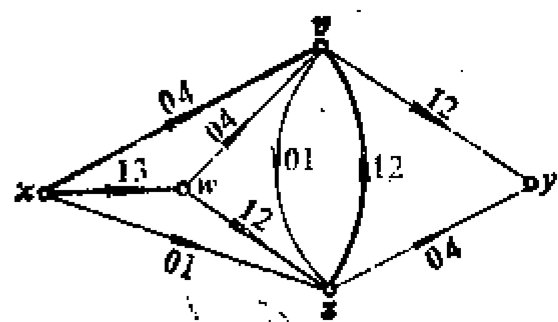


图 9.6

为了描述标数算法，还需要引进一些概念. 包含在网络 N 中的树 T 称为非饱和树，如果 T 满足(1) $x\in V(T)$；(2) 对任何 $v\in V(T)$，树 T 中从 x 到 v 的道路是 f 非饱和路. 图 9.6 中用粗线条画出的就是一个 f 非饱和树.

为了寻找网络 N 中的 f 可增路，只需逐步扩大 f 非饱和树. 最初，T 只由源 x 构成. 用以下两种方式之一来扩大 T：

(1) 设 $S=V(T)$，如果 $(S,\bar{S})$ 中存在 f 非饱和弧 $a=(u,v)$，则把弧 a 连同顶点 v 添加到 T 上；

(2) 如果 $(\bar{S},S)$ 中有 f 正弧 $a=(u,v)$，则把弧 a 连同 u 添加到 T 上.

显然，按以上两种方式扩大后的 T 仍然是 f 非饱和树. 如果 T 可逐步扩大直至其中包含顶点 y，这时 T 中从 x 到 y 的路就是 f 可增路 P，于是可以造出 f 关于可增路 P 的修改流 $\hat{f}$，$\mathrm{Val}\hat{f}>\mathrm{Val}f$. 这种情况称为突破. 如果到某一步 T 不能再继续扩大，且这时 T 中不包含顶点 y，则 f 是最大流.

标数算法是一个系统扩大非饱和树 T 的算法. 根据这个算法，每当得到非饱和树 T 的时候，T 的每一个顶点都附带上了标数 $(v)=l(P_v)$，这里 P_v 是 T 中从 x 到 v 的唯一非饱和道路，$l(P_v)$ 取(9.9)式决定的值. 标数算法的便利之处在于当实现突破时，不仅得到 f 可增路 P_y，同时也得到了值 $l(P_y)$，从而可以立即算出基于可增路 P_y 的修改流. 标数算法开始时首先给源 x 以标数 $l(x)=\infty$，其进行规则如下：

(1) 如果 a 是一条 f 非饱和弧，a 的尾 u 已有标数，但首 v 无标数，则 v 的标数 $l(v)=\min\{l(u),c(a)-f(a)\}$.

(2) 如果 a 是一条 f 正弧，a 的首 u 已有标数，但尾 v 无标

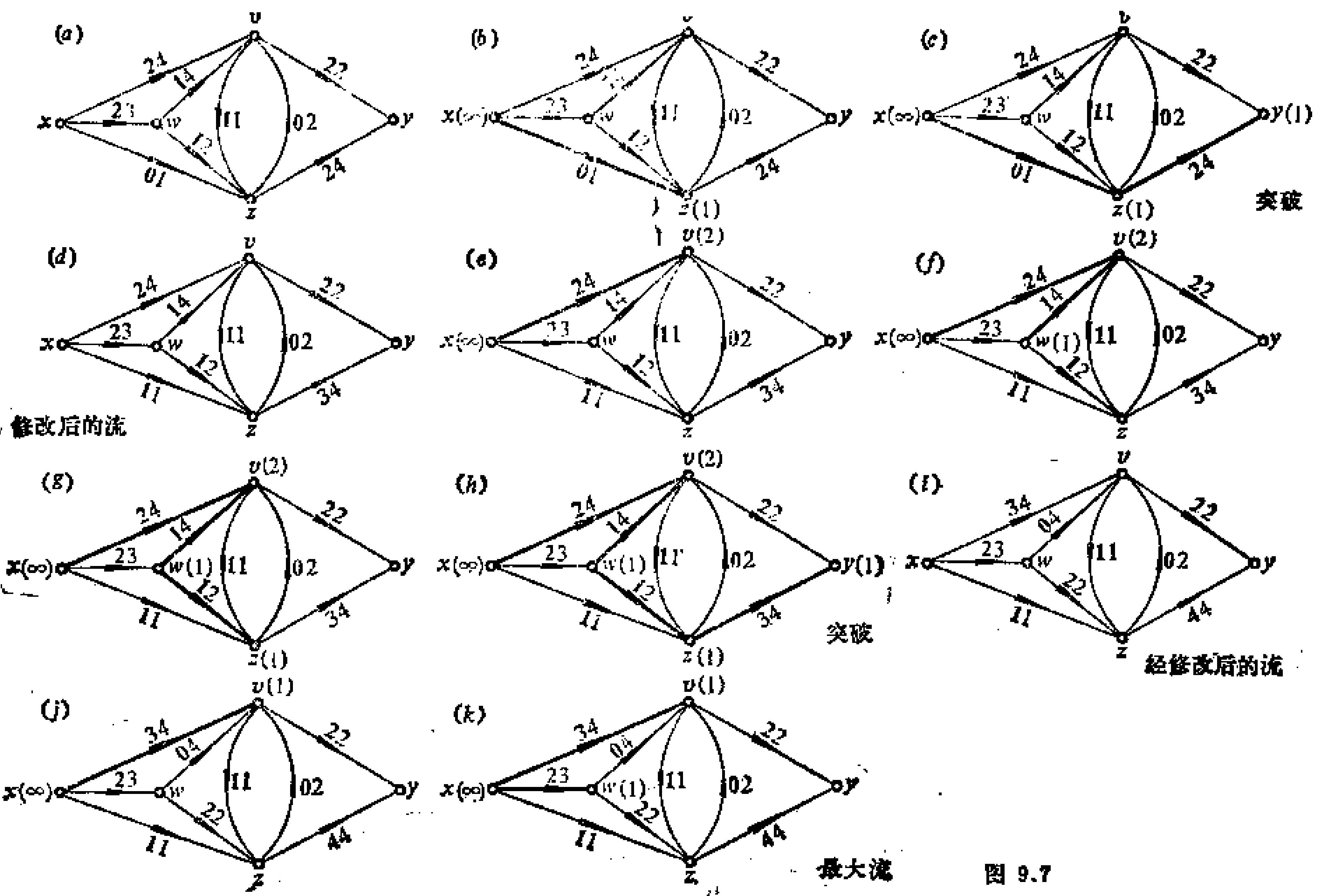


图 9.7

数，则 v 的标数 $l(v)=\min\{l(u),f(a)\}$.

以上两种情形都称为以顶点 u 为基础对顶点 v 标数. 设 u 是已经有了标数的顶点，以顶点 u 为基础对一切尚未标数的顶点进行标数的过程称为检查顶点 u. 标数过程总能进行下去，直至要么得到汇 y 的标数(这时出现突破)，或一切已经标数的顶点(其中无 y)都已被检查且不再存在任何其它的可标数的顶点(这时 f 是最大流). 图 9.7 中画出了用标数算法三次扩大 T 的过程，前两次导致突破，从而都得到值更大的修改流. 第三次不导致突破，因而这时的流已是最大流.

到目前为止，容量函数都是非负整数值函数. 不难看出，如果在网络的某些弧上容量函数取值正无穷大，即相应弧上的流量可以不受限制地取任何非负整数值，只要网络中存在容量有限的截，网络中就存在最大流并且最大流的值等于最小截的容量，且计算最大流的算法仍然是有效的.

习　题

9.2.1　求图 9.8 中的网络的一个最大流. 其中 x 是源，y 是汇.

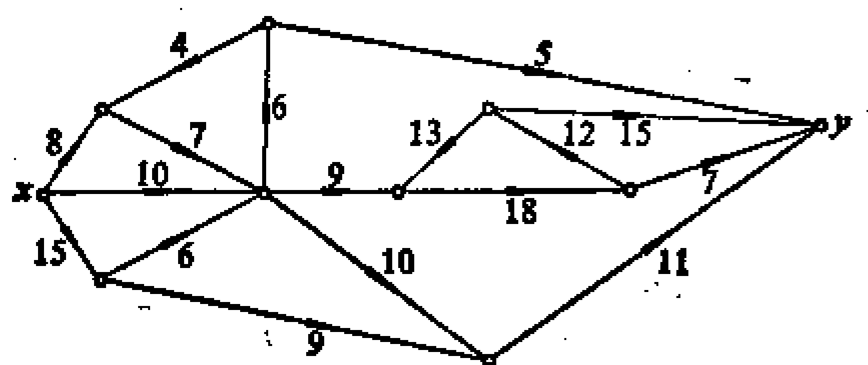


图 9.8

9.2.2　如果网络 N 中有一个有向圈 C，使得流 f 在 C 的每一条弧上的流量为正数，则称 f 有正环流. 证明 N 中的任何流 f 都有一个与它等值的流 f'，使得 f' 无正环流，并且在源 x 的每一条入弧以及汇 y 的每一条出弧上 f' 的流量为零.

9.2.3 在9.1节中定义网络流时，容量函数 c 是非负整函数．可以放宽要求，设 c 是非负广义实函数．即对 N 中的任何一条弧 a，$c(a)$是非负实数，且允许$c(a)=+\infty$，即在相应弧上的流量无限制．这时弧 a 上的流量 $f(a)$ 也允许取实数值．

对于上述放宽要求后的网络证明：

(a) 如果 N 中每一个截的容量都是无穷大，则N中最大流的值为$+\infty$，即 N 中有值任意大的流；

(b) 如果 N 中存在容量有限的截，则 N 中有流值有限的最大流．(提示：设截$(S, \bar{S})$的容量有限，因任何流 f 满足 $\mathrm{Val}f\leqslant c(S, \bar{S})$，选一系列的流 f_1，f_2，$\cdots$，f_n，$\cdots$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Val}f_n=\sup\{\mathrm{Val}f\}$．证明在每一条弧 a 上$\{f_n(a)\}$有界，从而有收敛的子序列．用重复取收敛子序列的办法，即得最大流．)

(c) 最大流最小截定理仍然成立．

9.2.4 考虑习题9.2.3意义下的流．如果容量函数为整数值函数，证明存在这样的最大流，它在每一条弧上的流量都是整数．

9.2.5 定义网络 N 时可以在弧集上给出上、下容量函数，即在 N 的每一条弧 a 上给定整数 $b(a)\leqslant c(a)$，而约束条件(9.1)改为$b(a)\leqslant f(a)\leqslant c(a)$．设网络中有满足约束条件的流，修改标数算法以求出最大流并证明最大流最小截定理．

9.3 最大流最小截定理的推广

到目前为止所研究的网络都只有一个源和一个汇，但实际问题常会出现多源多汇的情形．例如可以研究由若干柑桔产地，通过某一交通网，向若干城市供应柑桔的问题．这时，柑桔产地是网络的源，而作为柑桔销售地的城市是网络的汇．

多源多汇的网络以及其中的流 f 的定义与9.1中单源、单汇情形的定义完全类似，无非这时源和汇的数目都可能不只一个，它们的集合相应记为X和Y，$X\cap Y=\varnothing$．

完全与(9.4)式类似，定义

$$\mathrm{Val}f = f^+(X) - f^-(X) = f^-(Y) - f^+(Y)$$

为网络N中的流f的值．流值最大的流称为最大流，多源多汇网络中的截仍然定义为形如$(S,\bar{S})$的弧的全体，这里要求$X\subseteq S$，$Y\subseteq\bar{S}$．图 9.9 中画出的是一个源为x_1,x_2，汇为y_1,y_2的网络，弧旁标记的两个数中左边一个是相应弧的流量（粗体字），右边一个是弧的容量．这时流值是 4．

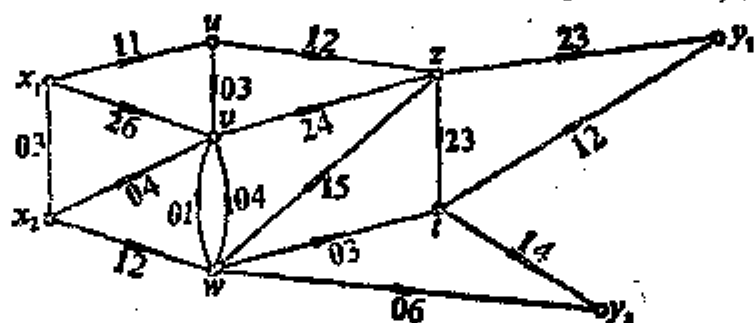


图 9.9

研究多源多汇的网络可以归结为研究单源单汇的网络，设N是以$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$为源集合，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_s\}$为汇集合的网络．新添两个顶点x'和y'，作弧(x',x_i) $(i=1,2,\cdots,r)$和弧(y_j,y') $(j=1,2,\cdots,s)$，并设这些新添加的弧的容量为$+\infty$，用N'记经过以上手续而得到的新网络．在网络N'中定义流f'如下

$$f'(a)=\begin{cases} f(a) & a\text{ 是 }N\text{ 中的弧} \\ f^+(x_i)-f^-(x_i) & a=(x',x_i)(i=1,2,\cdots,r) \\ f^-(y_j)-f^+(y_j) & a=(y_j,y')(j=1,2,\cdots,s) \end{cases}$$

容易看出，f'是以x'为源y'为汇的网络N'中的流并且

$$\mathrm{Val}f'=\mathrm{Val}f \tag{9.13}$$

反之，如果f'是N'中的流，以f记f'在N的弧集上的限制，则f是N中的流，且(9.13)式成立．这就建立了多源多汇的网络N中的流与单源单汇的网络N'中的流之间的一一对应关系．因此，求解多源多汇网络N中的最大流问题可归结为求解单源单汇

网络N'中的最大流问题．因弧(x',x_i) $(i=1,2,\cdots,r)$，(y_j,y') $(j=1,2,\cdots,s)$的容量都是$+\infty$，因此网络N'中的最小截不可能含有这些弧中的任何一条，从而N'中的最小截必是N中的最小截，故最大流最小截定理9.5对多源多汇的网络N仍然成立，因此有下面的定理．

定理9.6　设N是多源多汇的网络，则N中最大流的值等于最小截的容量．

图9.10中画出的是与图9.9中的网络N与流f相对应的网络N'与流f'．

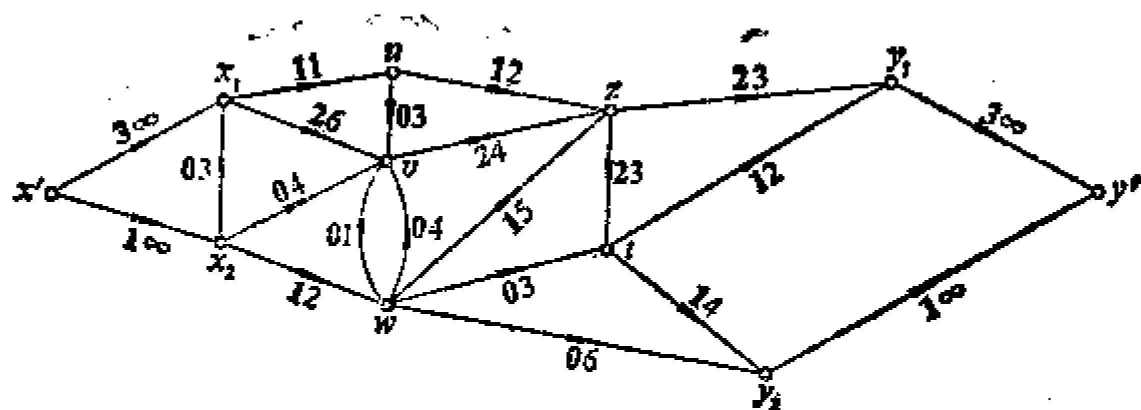


图 9.10

设D是一个有向图．其中的顶点x称为源，y称为汇．D中既不是源也不是汇的顶点称为中间顶点，中间顶点的集合记为I．假定在I上定义了一个非负整数值函数$c(v)$．这样就得到顶点有容量限制的网络N．这时网络N中的流是指定义在N的弧集A上的非负整数值函数f，在每一个$v\in I$满足条件

$$f^{+}(v)=f^{-}(v)\leqslant c(v) \tag{9.14}$$

(9.14)表示在每一个中间顶点流f满足守恒条件和容量约束条件．

对应于上述的网络N造网络N'如下：把N的每一个中间顶点v拆为两个顶点v'和v''，连弧(v',v'')；对N中每一条以$v\in I$为首的弧，N'中对应于一条以v'为首的弧；N中每一条以$v\in I$为

尾的弧，N'中对应于一条以v''为尾的弧；N'中形如(v',v'')的弧的容量为$c(v)$，其余各条弧的容量都是$+\infty$.

图 9.11 中画出的是网络N以及与它对应的网络N'. 顶点v，w，z的容量标记在相应的顶点旁边的括弧内.

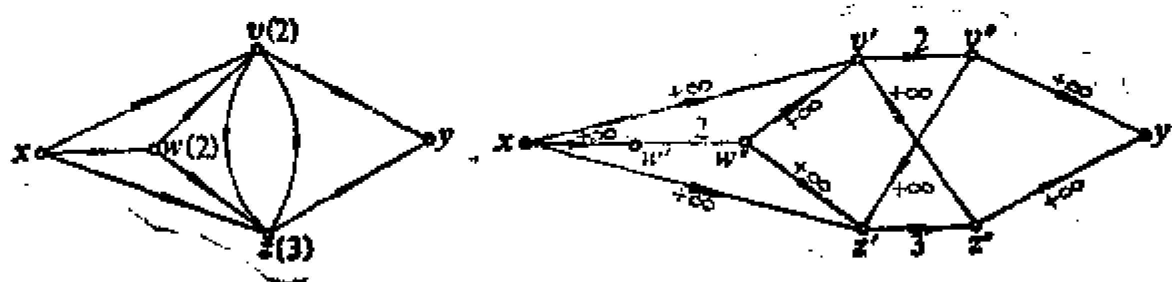


图 9.11

对于N中的流f，规定N'中的流f'如下：除了形如(v',v'')的弧上f'的流量定义为$f^+(v)$外，N'中其余各弧上f'的流量与N中相对应的各弧上f的流量相同. 例如，若N中有弧(v,z)，且v和z都是中间顶点，则N'中与(v,z)对应的弧是(v'',z')，我们定义f'在(v'',z')上的流量与f在(v,z)上的流量相同. 反之，如果f'是N'中的一个流，对于N中的任何一条弧a，规定f在a上的流量等于f'在与a相对应的弧a'上的流量. 容易看出，这就建立了N中的流f与N'中的流f'间的一一对应关系.

网络N'是单源单汇网络，对它来说最大流最小截定理 9.5 成立；虽然N'中有些弧的容量为$+\infty$，但在节 9.2 的最后已经说明，这并不妨碍定理 9.5 的真确性. 如果把N的中间顶点的集合记为$I=\{v,w,z,\cdots\}$. 在N'中记$S=\{x,v',w',z',\cdots\}$，$\bar{S}=\{y,v'',w'',z'',\cdots\}$，则$(S,\bar{S})$是$N'$中的截且它的容量值是$(v',v'')$，$(w',w'')$，$(z',z'')$，$\cdots$等各条弧的容量的和，因而取有限值. 由于$N'$中除了从中间顶点演化出来的弧$(v'v'')$，$(w',w'')$，$(z',z'')$，$\cdots$等之外，一切其它的弧的容量都是$+\infty$，故$N'$中的最小截是$N'$中形如$(v',v'')$的弧的某个集合，除去这个集合中的弧以后，

N'中不再有从 x 到 y 的有向路，且这个弧集中各条弧的容量之和最小. 因此，如果对顶点有容量限制的网络 N 定义其中的顶点截是这样一些中间顶点的集合，除去这些顶点之后，N 中不再有从 x 到 y 的有向路，且在上面的要求之下，集合中各顶点的容量的和最小，那么对 N 成立如下的最大流最小截定理.

定理 9.7 设 N 是除源 x 和汇 y 以外每一个中间顶点都给以容量限制(9.14)的网络，则 N 中流的最大值等于截的最小容量.

如果对于网络 N 中的每一条弧给出形如(9.1)的约束条件，对每一个中间顶点给出形如(9.14)的约束条件，而网络 N 中的流是指定义在 N 的弧集 A 上的非负整函数，它在 A 上满足约束条件(9.1)，在每一个中间顶点满足约束条件(9.14)，这时只要定义 N 的混合截是 N 的某些中间顶点和某些弧所构成的集合，除去这个集合中的元素后 N 中不再有从 x 到 y 的有向路，混合截的容量定义为其中各元素的容量之和. 不难看出，关于以上的网络 N 有下面的定理.

定理 9.8 设 N 是每一个中间顶点和每一条弧都给以容量约束条件的网络，则 N 中流的最大值等于混合截的最小容量.

习　题

9.3.1 设工厂 x_1 与 x_2 生产同一种商品，通过下面的网络运往销售地

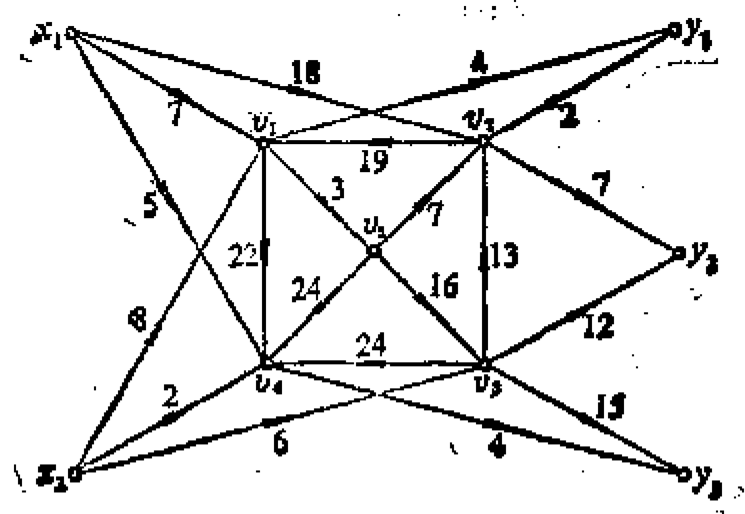


图 9.12

y_1, y_2, y_3，用标号算法求出从工厂运往销售地的最大可能的商品量。

9.4 门格尔定理

门格尔（K. Menger）在1927年给出了刻画图G为k连通和k边连通的重要定理（关于k连通和k边连通的概念参阅2.1），这一节将用网络流理论来证明门格尔定理。

引理 9.9 设N是以x为源y为汇的网络，且每一条弧的容量都等于1．则

（1）N中最大流的值等于从x到y互无公共弧的有向路的最大数目m；

（2）N中最小截的容量等于为使网络中不再存在从x到y的有向路所必须删去的弧的最小数目n。

证 （1）设f是最大流．因弧的容量都等于1，故f在每一条弧上的流量要么为零，要么为1．从N中删去一切使f的流量为零的弧，剩下的仍然是一个网络，记为N'．f在N'的弧集上的限制显然是N'中的流，记为f'，并且有$\mathrm{Val}f'=\mathrm{Val}f$．如果不计每一条弧上的流量和容量，$N'$可以看成有向图，记为$D'$．因$f'$在$N'$的每一条弧上的流量为+1，故关于有向图$D'$的每一个顶点$v$有等式

$$f'^{+}(v)=d^{+}_{D'}(v)$$
$$f'^{-}(v)=d^{-}_{D'}(v)$$

故

$$d^{+}_{D'}(x)-d^{-}_{D'}(x)=d^{-}_{D'}(y)-d^{+}_{D'}(y)=\mathrm{Val}f'=\mathrm{Val}f$$
$$d^{+}_{D'}(v)=d^{-}_{D'}(v)\qquad v\in V(D')\backslash\{x,y\}$$

由推论8.6可知D'中有$\mathrm{Val}f$条从x到y互无公共弧的有向路．这些有向路也是网络N中的有向路，因此

$$\mathrm{Val}\,f\leqslant m \tag{9.15}$$

反之，取定N中m条从x到y互无公共弧的有向路，定义这样的一个流，它在这m条有向路的每一条弧上的流量为1，在一切其它弧上的流量为零．显然，这样定义的流确实是网络N中的流，且它的流值为m．故

$$m \leqslant \mathrm{Val}\, f \tag{9.16}$$

由(9.15)和(9.16)可知

$$m = \mathrm{Val}\, f$$

(2) 设$K=(S,\bar{S})$是N的最小截．因为从x到y的任何有向路一定至少包含K中的一条弧，从而删去K的弧以后$N-K$中不再包含从x到y的有向路，因此

$$n \leqslant |K| = \mathrm{Cap}K \tag{9.17}$$

反之，设L是N中的弧集并且$|L|=n$，且$N-L$中没有从x到y的有向路．记$N-L$中由x可以到达的顶点的全体为S'，则$x \in S'$，$y \notin S'$，故$K'=(S',\bar{S}')$是网络N中的一个截，显然，$K' \subseteq L$．事实上，如果$(u,v) \in K'$，$(u,v) \notin L$，因为$N-L$中有由x到达u的有向路P_{xu}，$P_{xu}(u,v)$是$N-L$中由x到v的有向路，这和$v \in \bar{S}'$矛盾．因此

$$\mathrm{Cap}K \leqslant \mathrm{Cap}K' = |K'| \leqslant |L| = n \tag{9.18}$$

由(9.17)和(9.18)可知

$$n = \mathrm{Cap}K \quad \square$$

定理 9.10 设x和y是有向图D中的任意两个顶点，则从x到y互无公共弧的有向路的最大数目等于为使D中不再存在从x到y的有向路所必须删去的弧的最小数目．

证　把x看成源y看成汇，又设D的每一条弧的容量为1，这样就得到一个网络N，由引理9.9和最大流最小截定理（定理9.5)，立即得到定理中的结论．□

定理 9.11 设x和y是图G中的任意两个顶点，则从x到y互无公共边的路的最大数目等于为使G中不再存在从x到y的路

所必须删去的边的最小数目.

证　把G的任一条边$e=uv$用两条弧$e'=(u,v)$与$e''=(v,u)$来代替，这样就得到有向图D. 考虑G中m条从x到y的互无公共边的路. 任取其中的一条，记为$P=x_0x_1x_2\cdots x_k(x_0=x,x_k=y)$. 把$P$中的边$x_{i-1}x_i(1\leqslant i\leqslant k)$用$D$中的弧$(x_{i-1},x_i)$来代替，在$D$中就得到$m$条从$x$到$y$的有向路，显然它们之间互无公共弧. 反过来的情况稍稍复杂一些. 考虑D中m条从x到y的互无公共弧的有向路，任取其中的一条，记为$P'=(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_k)(x_0=x,x_k=y)$，把$P'$中的弧$(x_{i-1},x_i)(1\leqslant i\leqslant k)$用$G$中的边$x_{i-1}x_i$来代替，就在$G$中得到$m$条从$x$到$y$的路，但是这样得到的路之间可能有公共边. 例如考察图 9.13 中的两条从x到y的互无公共弧

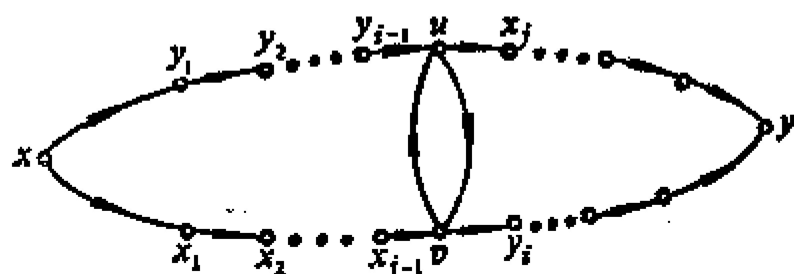


图 9.13

的有向路$P_1'=(x,y_1,y_2,\cdots,y_{i-1},u,v,y_i,\cdots,y)$，$P_2'=(x,x_1,x_2,\cdots,x_{j-1},v,u,x_j,\cdots,y)$，当按前述办法把弧转换为边之后，与它们对应的$G$中的路将有公共边$uv$. 如果出现上面的情况，代替$P_1'$和$P_2'$考虑$P_1''=(x,y_1,y_2,\cdots,y_{i-1},u,x_j,\cdots,y)$与$P_2''=(x,x_1,x_2,\cdots,x_{j-1},v,y_i,\cdots,y)$. 经变换后的$D$中的$m$条有向路仍然互无公共弧，但是$G$中按前边叙述的规则与它们对应的$m$条路相互间出现的公共边的次数比原先的情形少一次. 因此，经过有限多次上述手续之后可以得到G中m条互无公共边的路，根据以上的说明可知D中从x到y互无公共弧的有向路的最大数目等于G中从x到y互无公共边的路的最大数目.

如果删去m条边的边集E_1后将破坏G中一切从x到y的路．以S记$G-E_1$中与x之间有路相连的一切顶点的集合，则$x\in S$，$y\in\bar{S}$．不难看出$[S,\bar{S}]\subseteq E_1$．对于任一条边$e=uv\in[S,\bar{S}]$，$u\in S$，取弧(u,v)与e对应；对于$E_1\backslash[S,\bar{S}]$中的每一条边，取D中与它同端点的两条弧中的任何一条来与它对应，这样就得到D中与E_1相对应的m条弧，删去这组弧后将破坏D中从x到y的一切有向路．反之，如果删去D中数目为m的一组弧之后将破坏从x到y的一切有向路，则在G中删去和这组弧中的每一条弧端点相同的那m条边将破坏从x到y的一切路．因此，删去后将破坏一切从x到y的路的G中的边的最小数目等于删去后将破坏一切从x到y的有向路的D中的弧的最小数目．

根据以上的解释和定理9.10，立即得到定理9.11中的结论．□

定理 9.12（关于k边连通图的门格尔定理） 图G为k边连通图的充分必要条件是它的任何两个不同的顶点之间都有k条互无公共边的路相连．

证 充分性 如果G的任何两个不同的顶点x和y之间都有k条互无公共边的路相连，则G中删去任何$k-1$条边都不可能破坏G的连通性，亦即G中不存在由$k-1$条边构成的边割，按定义G是k边连通的．

必要性 如果G k边连通，则G中不存在由$k-1$条边构成的边割，故对于任何两个不同的顶点x和y，至少要删去k条边才可能破坏连接x和y的一切路，由定理9.11，x和y之间有k条互无公共边的路相连．□

定理 9.13 设x和y是有向图D中不相邻的顶点，则D中从x到y互无公共内点的有向路的最大数目等于为使D中不再存在从x到y的有向路所必须删去的$V(D)\backslash\{x,y\}$中的顶点的最小数目．

证　对有向图D进行类似于图 9.11 中关于网络N的改造后得到D'。即若$V(D)=\{x,y,v_1,v_2,\cdots,v_\nu\}$，则$V(D')=\{x,y,v_1',v_1'',\cdots,v_\nu',v_\nu''\}$；又若$D$中有弧$(x,v_i)$，$(v_i,x)$，$(y,v_k)$，$(v_k,y)$，则在$D'$中对应地连弧$(x,v_i')$，$(v_i'',x)$，$(y,v_k')$，$(v_k'',y)$；若$D$中有弧$(v_i,v_j)$，则在$D'$中连弧$(v_i'',v_j')$；此外在$D'$中还连上所有形如$(v_i',v_i'')$的弧。

如果D中没有从x到y的有向路，D'中也就没有从x到y的有向路；反之亦真。如果D中有从x到y的有向路$(x,v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_l},y)$，则在$D'$中有从$x$到$y$的有向路$(x,v_{i_1}',v_{i_1}'',v_{i_2}',v_{i_2}'',\cdots,v_{i_l}',v_{i_l}'',y)$。反过来，由于在$D'$中$v_i'$的出邻点只有$v_i''$，$v_i''$的入邻点只有$v_i'$，因此$D'$中从$x$到$y$的有向路必有形式$(x,v_{i_1}',v_{i_1}'',v_{i_2}',v_{i_2}'',\cdots,v_{i_l}',v_{i_l}'',y)$，在$D$中与它相对应的是有向路$(x,v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_l},y)$。于是$D$中从$x$到$y$的有向路的集合与$D'$中从$x$到$y$的有向路的集合之间存在一一对应。在这个一一对应下，D中从x到y互无公共内点的有向路的集合对应于D'中从x到y互无公共弧的有向路的集合；反过来容易看出，D'中从x到y互无公共弧的有向路的集合也对应于D中互无公共内点的有向路的集合。因此，D中从x到y没有公共内点的有向路的最大数目等于D'中从x到y没有公共弧的有向路的最大数目。

由于D中没有从x到y的有向路的充要条件是D'中没有从x到y的有向路，因此以下限于考虑D和D'中都有从x到y的有向路的情形。因x和y在D中不相邻，故$V(D)\backslash\{x,y\}$中一定有这样的顶点的集合，删去集合中的顶点之后将破坏D中从x到y的一切有向路，设这样的集合中顶点的最小数目为n，由于D中有从x到y的有向路，故$n\geqslant 1$，又设$I=\{u,v,w,\cdots\}$就是这样的一个集合，$|I|=n$　设删去后将破坏D'中从x到y的一切有向路的弧的最小数目为n'，由于D'中有从x到y的有向路，故$n'\geqslant 1$，又设B就是这样的一个弧集，$|B|=n'$。显然从D'中删去与I中的

顶点相对应的弧(u',u''),(v',v''),(w', w''),… 等之后将破坏D'中从x到y的一切有向路,因此

$$n'\leqslant n \tag{9.19}$$

因x与y在D'中也不相邻,由于B是满足前述要求的数目最小的弧集,其中不可能包含形如(v_i'',x)及(y,v_i')形的弧,故B中的弧只能有下面的类型:(u',u'')形的弧,(x,u')形的弧,(u'',y)形的弧,以及(v'',u')形的弧. 我们将B中形如(x,u'),(u'',y)和(v'',u')的弧都换成形如(u', u'')的弧, 将得到一个新的弧集B'. 因(u',u'')是u'的唯一出弧和u''的唯一入弧, 故删除B'中的弧也将破坏D'中所有从x到y的有向路, 由B的最小性可知$|B'|=|B|=n'$. 容易看出,如果将B'中的弧所对应的D中的顶点删除,D中将不再有从x到y的有向路,所以

$$n\leqslant n' \tag{9.20}$$

由(9.19)和(9.20)可知

$$n=n'$$

总之我们证明了: 删去后将破坏D中从x到y的一切有向路的$V(D)\backslash\{x,y\}$ 中的顶点的最小数目等于删去后将破坏D'中从x到y的一切有向路的弧的最小数目.

根据以上的说明,由定理 9.10 立即得到定理 9.13 的结论.□

定理 9.14 设x和y是图G中不相邻的顶点,则连接x和y的互无公共内点的路的最大数目等于为使G中不再存在从x到y的路所必须删去的$V(G)\backslash\{x,y\}$中的顶点的最小数目.

证 只需把G中的边换为端点相同但方向相反的两条弧, 得有向图D,再进行与定理 9.11 的证明类似的推理即可. □

定理 9.15(关于k连通图的门格尔定理) $\nu\geqslant k+1$的图G是k连通图的充分必要条件是G的任何两个不相邻的顶点之间有k条互无公共内点的路相连.

证 若$\nu(G)\geqslant k+1$, 且G的任何两个不相邻的顶点之间有

k 条互无公共内点的路相连，则 G 中不存在由 $k-1$ 个顶点构成的顶点割，因此 G 是 k 连通的。

反之，设 G 是 k 连通的，如果 G 中有不相邻的顶点 x 和 y，由于至少要删去 $V(G)\setminus\{x,y\}$ 中的 k 个顶点才能破坏 x 和 y 之间的一切路，因此由定理 9.14 一定有互无公共内点的 k 条路连接顶点 x 和 y。□

习　题

9.4.1　设 $U\subset V(G)$，又 $v\in V(G)\setminus U$　$v-U$ 扇是指图 G 中从 v 到 U 的 $|U|$ 条路，其中的任何两条除 v 外再无其它的公共顶点，证明图 G k 连通的充分必要条件为 G 的阶至少为 $k+1$ 且对于任何 $U\subset V(G)$，$|U|=k$，以及任何 $v\in V(G)\setminus U$，G 中都有 $v-U$ 扇。（提示：设 G k 连通，添加新顶点 u，在 u 与 U 的每一个顶点间连边，得新图 G'；证明 G' k 连通，用定理 9.15.）

9.4.2　证明 k 连通图($k\geq 2$)的任何 k 个顶点都在某一个圈上。（提示：归纳法；k 连通图一定 $k-1$ 连通；利用习题 9.4.1 中的结果。）

9.4.3　设 S 与 T 是图 G 的顶点集 V 的两个互不相交的子集，证明一端在 S 中一端在 T 中且互无公共顶点的路的最大数目等于删去后将破坏连接 S 和 T 的一切路的顶点的最小数目。

9.4.4　如果已知顶点型的门格尔定理(定理 9.15)成立，通过考虑图 G 的线图 $L(G)$，证明边型的门格尔定理(定理 9.12)成立。

9.4.5　用定理 9.14 来证明定理 5.6(柯尼希定理)。

参 考 文 献

Ford, L. R. Jr. and Fulkerson, D. R (1956). Maximal flow through a network. Canad. J. Math., 8, 399—404

Ford, L. R. Jr. and Fulkerson, D. R. (1957). A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem. Canad. J. Math., 9, 210—18

Ford, L. R. Jr. and Fulkerson, D. R. (1962). Flows in Networks, Princeton University Press, Princeton

第十章　图的矩阵表示与向量空间

10.1　图的关联矩阵与邻接矩阵

在 1.1 节引入了关联矩阵与邻接矩阵的概念，这一节将对它们做进一步的讨论．实际上，从前面各章可以看出，用图形表示图是很方便的．但是，一个图除可用图形表示外，还可用矩阵表示．图的矩阵表示便于用计算机贮存和处理图．

设 G 是一个具有 ν 个顶点和 e 条边的非空图．为了简单起见，我们这里还假定 G 中没有环，即 G 中的每一条边都是连杆．一个 $\nu\times e$ 矩阵 $\boldsymbol{M}(G)=[m_{ij}]$ 称为 G 的**关联矩阵**，如果

$$m_{ij}=\begin{cases}1\text{，当第 } i \text{ 个顶点与第 } j \text{ 条边相关联}\\0\text{，在相反的情形下}\end{cases}$$

在图 10.1 中，我们给出了一个图及其关联矩阵

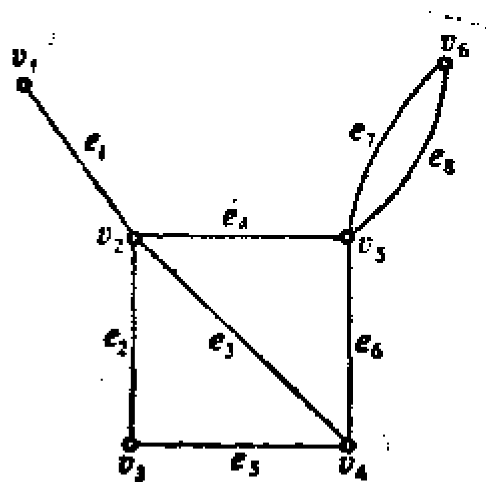


图 G

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
v_1	1	0	0	0	0	0	0	0
v_2	1	1	1	1	0	0	0	0
v_3	0	1	0	0	1	0	0	0
v_4	0	0	1	0	1	1	0	0
v_5	0	0	0	1	0	1	1	1
v_6	0	0	0	0	0	0	1	1

图 G 的关联矩阵

图 10.1

根据图的关联矩阵的定义，如果已给出一个图的图形表示，我们能够很容易地写出图的关联矩阵．反之，如果给定了一个图的

关联矩阵，我们也能很容易地给出图的图形表示。实际上，图的关联矩阵与图形表示含有关于图的相同的信息。

图的关联矩阵有下列非常明显的性质：

(1) 每一列恰包含两个 1（因为每一条连杆恰与两个顶点相关联）。

(2) 每一行所包含的 1 的个数等于对应顶点的度。

(3) 若 G 是不连通的，设 $G_1, G_2, \cdots, G_\omega$ 是它的连通分支，那么由于属于一个分支的顶点和属于另一个分支的边互不关联，只要适当排列顶点和边所对应的行与列，G 的关联矩阵可以写成如下的块对角形式：

$$\boldsymbol{M}(G)=\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}(G_1) & & & 0 \\ & \boldsymbol{M}(G_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boldsymbol{M}(G_\omega) \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{M}(G_i)$ 是连通分支 $G_i(i=1,2,\cdots,\omega)$ 的关联矩阵。

(4) 将一个关联矩阵中的两行或两列互换，相当于在同一个图中将两个对应的顶点或边的标号互换。由此我们可以得到下面的定理 10.1。

定理 10.1 两个图 G_1 与 G_2 同构，当且仅当它们的关联矩阵可以通过行换序和列换序而互化。□

下面我们讨论图的关联矩阵的秩。首先我们注意，关联矩阵只包含 0 和 1 这两个不同的元素。为了与下面要涉及到的图的向量空间协调，我们还规定这两个元素取自域 $GF(2)$（即集合 $\{0, 1\}$，在其上定义了 mod.2 加法：$0+0=1+1=0$，$0+1=1+0=1$，以及 mod.2 乘法：$0\cdot0=0\cdot1=1\cdot0=0, 1\cdot1=1$）。其次，对于任一个具有 e 条边的图 G，我们称域 $GF(2)$ 上的 e 维向量空间为 G 的边向量空间，于是，G 的关联矩阵 $\boldsymbol{M}(G)$ 的每一行都是其边向量空

间中的向量.若将 $M(G)$ 的第 i 行记为 M_i, $1\leqslant i\leqslant \nu$, 则

$$M(G)=\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_\nu \end{bmatrix} \tag{10.1}$$

因此矩阵 $M(G)$ 的秩就是 $M_1, M_2, \cdots, M_\nu$ 所包含的线性无关的向量的个数的最大值.

定理 10.2 若 G 是 ν 阶连通图，则 G 的关联矩阵的秩为 $\nu-1$.

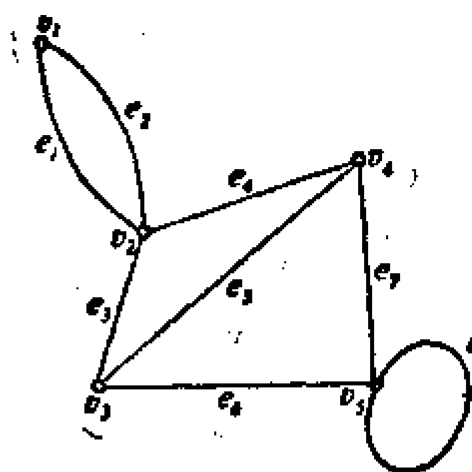
证 设秩 $M(G)=r$. 因为 $M(G)$ 的每一列恰有两个 1,所以 $M(G)$ 的全部行向量 $M_1, M_2, \cdots, M_\nu$ 的和等于 0. 因此 $M_1, M_2, \cdots, M_\nu$ 是线性相关的,即 $r\leqslant \nu-1$.

现在我们考虑 $M(G)$ 中的任意 k 个行向量 $M_{i_1}, M_{i_2}, \cdots, M_{i_k}$, $1\leqslant k\leqslant \nu-1$. 因为 G 是连通的, $M_{i_1}, M_{i_2}, \cdots, M_{i_k}\neq 0$, 且 G 中必有一条边,它的一个端点与某个 $i_l\in\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 相对应,而另一个端点与某个 $i_j\in\{1, 2, \cdots, \nu\}\setminus\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 相对应. 于是在 $M(G)$ 中必有一列，它所包含的两个 1 中，有一个且仅有一个是 $M_{i_1}, M_{i_2}, \cdots, M_{i_k}$ 中的某一个的分量. 由此可知, $M_{i_1}, M_{i_2}, \cdots, M_{i_k}$ 的和不等于 0. 由于 $GF(2)$ 只有 0 和 1 两个元素， $M(G)$ 中任何 $\nu-1$ 个行向量的任何一个系数不全为 0 的线性组合一定是这 $\nu-1$ 个向量中某 k 个向量的和, $1\leqslant k\leqslant \nu-1$. 而当 $1\leqslant k\leqslant \nu-1$ 时,任何 k 个向量的和不等于 0,所以 $M(G)$ 的任何 $\nu-1$ 个行向量是线性无关的. 因此 $r\geqslant \nu-1$. □

利用定理 10.2,并注意具有 ω 个连通分支的图 G 的关联矩阵可以写成块对角形式，不难将定理 10.2 作如下推广.

定理 10.3 若 ν 阶图 G 具有 ω 个连通分支， $\omega\geqslant 1$， 则秩 $M(G)=\nu-\omega$. □

图除可用关联矩阵表示外，还可用邻接矩阵表示．设 G 是一个 ν 阶图，G 的**邻接矩阵** $\boldsymbol{A}(G)=[a_{ij}]$ 是一个 $\nu\times\nu$ 矩阵，其中 a_{ij} 等于图 G 中第 i 个顶点与第 j 个顶点间的边数．作为例子，图 10.2 给出了一个图及其邻接矩阵．



$$\boldsymbol{A}(G)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\end{array} \qquad (10.2)$$

图 G　　　　　　　　图 G 的邻接矩阵

图 10.2

图的邻接矩阵有下列非常明显的性质：

(1) 若 G 是 ν 阶图，则 $\boldsymbol{A}(G)$ 是一个以非负整数为元素的 ν 阶对称方阵．反之，对于任何给定的以非负整数为元素的 ν 阶对称方阵 $\mathbf{Q}$，总可以构造一个 ν 个顶点的图 G，使得 $\mathbf{Q}=\boldsymbol{A}(G)$，即 $\mathbf{Q}$ 是 G 的邻接矩阵．

(2) G 中第 i 个顶点的度等于 $\sum\limits_{\substack{j\\ j\neq i}} a_{ij}+2a_{ii}$．

(3) $\boldsymbol{A}(G)$ 中两行的对换以及相应的两列的对换，相当于 G 中两个对应的顶点的标号的对换．因此，两个图 G_1 与 G_2 同构，当且仅当存在一个置换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{A}(G_2)=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}(G_1)\boldsymbol{P}$$

所谓置换矩阵是指一个每行及每列恰有一个元素为 1，而其余元素均为 0 的矩阵．

(4) G 由 ω 个连通分支 $G_1,G_2,\cdots,G_\omega$ 组成，当且仅当在顶

点的适当标号下G的邻接矩阵$A(G)$可写成如下的块对角形式：

$$A(G)=\begin{bmatrix} A(G_1) & & & 0 \\ & A(G_2) & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & A(G_\omega) \end{bmatrix}$$

其中$A(G_i)$是连通分支G_i的邻接矩阵.

根据定义，邻接矩阵$A(G)$中的元素a_{ij}等于图G中连接第i个顶点与第j个顶点的不同边的条数．其实我们也可以把a_{ij}解释为G中连接第i个顶点与第j个顶点的长度为1的不同途径的数目．下面我们将会看到这种解释是有意义的．首先看看$A(G)$与自身的乘积．例如，图10.2中的图G的邻接矩阵$A(G)$是一个5阶对称方阵，而$A^2(G)=A(G)A(G)$也是一个5阶方阵：

$$A^2(G)=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad (10.3)$$

不难看出，$A^2(G)$中第i行第j列的元素——我们把它记为$a_{ij}^{(2)}$——等于由v_i到v_j的长度为2的不同途径的数目．实际上我们有

$$a_{ij}^{(2)}=\sum_{k=1}^{\nu} a_{ik}a_{kj}$$

由于a_{ik}是v_i到v_k的长度为1的不同途径的数目，而a_{kj}是v_k到v_j的长度为1的不同途径的数目，$a_{ik}a_{kj}$就是从v_i到v_j的经过v_k的长度为2的不同途径的数目，因而$\sum_{k=1}^{\nu} a_{ik}a_{kj}$就是从$v_i$到$v_j$的全部长度为2的不同途径的数目．这里需要注意的是，按照定

义，一条长度为 l 的途径是一个如下的顶点与边的序列：

$$v_{i_1}e_{i_1}v_{i_2}e_{i_2}\cdots v_{i_l}e_{i_l}v_{i_l+1}$$

其中每一条边恰以序列中与它相邻的两个顶点为其两个端点．因此可能出现这样的情况：两个途径做为顶点和边的序列是不相同的，而做为顶点和边的族是相同的．例如，在(10.3)中 $a_{11}^{(2)}=4$，连接 v_1 与 v_1 的长度为 2 的不同途径有 4 条，它们是

$$v_1e_1v_2e_2v_1,\quad v_1e_2v_2e_1v_1$$

$$v_1e_1v_2e_1v_1,\quad v_1e_2v_2e_2v_1$$

其中前两个途径做为顶点和边的序列是不同的，而做顶点与边的族是相同的。

由于矩阵的乘法满足结合律，对于一般的正整数 r，我们可以定义 $A(G)$的 r 次幂：

$$A^r(G)=A^{r-1}(G)A(G)=A(G)A^{r-1}(G)$$

关于 $A^r(G)$，我们有如下的定理．

定理 10.4　$A^r(G)$中的第 i 行第 j 列的元素等于 G 中连接 v_i 与 v_j 的长度为 r 的不同的途径的数目，$1\leqslant i,j\leqslant \nu$．

证　对 r 施行数学归纳法．当 $r=1$ 时，由 $A(G)$的定义知定理成立．设 $A^{r-1}(G)$的第 i 行第 j 列的元素等于 G 中连接 v_i 与 v_j 的长度为 $r-1$ 的不同的途径的数目．将 $A^r(G)$ 中第 i 行第 j 列的元素记为$a_{ij}^{(r)}$，于是

$$a_{ij}^{(r)}=\sum_{k=1}^{\nu}a_{ik}^{(r-1)}a_{kj}$$

由归纳假设，$a_{ik}^{(r-1)}$是 G 中连接 v_i 与 v_k 的长度为 $r-1$ 的不同途径的数目，因而 $a_{ik}^{(r-1)}a_{kj}$ 就是通过 v_k 的 v_i 与 v_j 之间的长度为 r 的不同途径的数目，而$\sum\limits_{k=1}^{\nu}a_{ik}^{(r-1)}a_{kj}$ 就是全部的 v_i 与 v_j 之间的长度为 r 的不同的途径的数目．□

推论 10.5 设图 G 有 ν 个顶点. G 是连通图的充分必要条件是矩阵 $X=A(G)+A^2(G)+\cdots+A^{\nu-1}(G)$ 中每一个不在主对角线上的元素都不等于 0.

证 若 G 连通，则 G 中任何两个不同的顶点 v_i 与 $v_j(i\neq j)$ 之间有一条路，设其长度为 l. 显然 $l\leqslant\nu-1$. 于是在 $A^l(G)$ 中 $a_{ij}^{(l)}\neq 0$,从而 X 中第 i 行第 j 列的元素不等于 0. 因 $i\neq j$ 是任意的,所以必要性成立.

反之,由 X 中每一个不在对角线上的元素不等于 0 可知,G 中任何两个不同顶点之间有一条长度不超过 $\nu-1$ 的途径,从而 G 是连通的. □

推论 10.6 连通图 G 中两个顶点 v_i 与 $v_j(i\neq j)$ 之间的距离等于 k,当且仅当 k 是使 $A^k(G)$ 中第 i 行第 j 列的元素不为 0 的最小整数.

证 v_i 与 v_j 之间的距离为 k,当且仅当 G 中有一条长为 k 的路,但没有长度小于 k 的路,亦即: $A^k(G)$的第 i 行第 j 列的元素不为 0,而对一切 $r\leqslant k-1$,$A^r(G)$的第 i 行第 j 列的元素为0. □

习　　题

10.1.1 求图 G,使得

$$M(G)=\begin{pmatrix}0&0&1&0&1\\1&1&0&1&1\\1&0&1&1&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

10.1.2 证明定理 10.3.

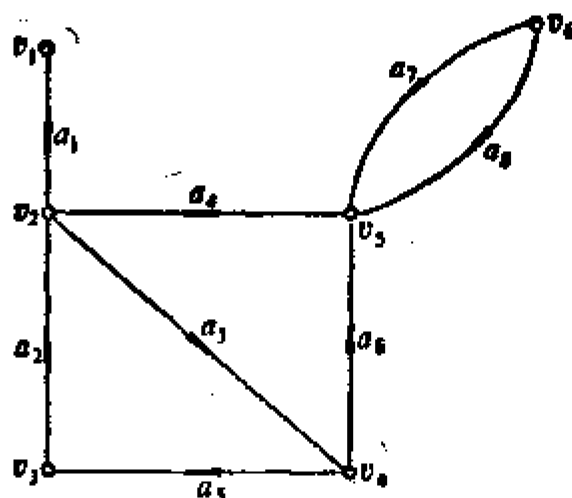
10.2 有向图的关联矩阵与邻接矩阵

对于有向图，我们也可以定义关联矩阵和邻接矩阵并得到一系列有关的性质.

设D是一个具有ν个顶点ε条弧且无环的非空有向图. D的关联矩阵 $M(D)=[m_{ij}]$是一个$\nu\times\varepsilon$矩阵,其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & \text{第}\ i\ \text{个顶点是第}\ j\ \text{条弧的尾}\\ -1 & \text{第}\ i\ \text{个顶点是第}\ j\ \text{条弧的首}\\ 0 & \text{第}\ i\ \text{个顶点与第}\ j\ \text{条弧不关联.}\end{cases}$$

在图 10.3 中给出的是一个有 6 个顶点、 8 条弧的有向图及其关联矩阵.



有向图D

$$M(D)=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc}a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

D的关联矩阵

图 10.3

有向图的关联矩阵有着与图的关联矩阵相类似的性质.

(1) $M(D)$的每一列恰有一个 1 和一个 -1.

(2) $M(D)$的每一行中的 1 的个数等于对应顶点的出度, 而 -1 的个数等于对应顶点的入度.

(3) 若D是不连通的,设 $D_1,D_2,\cdots,D_\omega$ 是 D 的连通分支,

则 $\boldsymbol{M}(D)$ 可以写成如下的块对角形式：

$$\boldsymbol{M}(D)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}(D_1) & & & 0\\ & \boldsymbol{M}(D_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boldsymbol{M}(D_\omega)\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{M}(D_i)$ 是有向图 D_i 的关联矩阵，$i=1,2,\cdots,\omega$。

(4) 将 $\boldsymbol{M}(D)$ 中的两行或两列互换，相当于在 D 中将两个对应的顶点或边的标号互换。由此可以得到下面的定理 10.7。

定理 10.7 两个有向图同构，当且仅当它们的关联矩阵可以通过行换序和列换序而互化。□

关于 $\boldsymbol{M}(D)$ 的秩，有与定理 10.2 相类似的下列定理。

定理 10.8 若 ν 阶有向图 D 是连通的，则秩 $\boldsymbol{M}(D)=\nu-1$。

证 只需考虑 $\nu\geqslant 2$ 的情形，因为当 $\nu=1$ 时，由于 D 中无环而有 $e=0$，从而 $\boldsymbol{M}(D)$ 无定义。

将 $\boldsymbol{M}(D)$ 的每一行看作实数域上的 e 维向量空间的向量并用 $\boldsymbol{M}_i$ 表示，$i=1,2,\cdots,\nu$。于是

$$\boldsymbol{M}(D)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_1\\ \boldsymbol{M}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{M}_\nu\end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{M}(D)$ 的每一列恰有一个 1 和一个 -1，我们有 $\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2+\cdots+\boldsymbol{M}_\nu=0$，也就是说组成 $\boldsymbol{M}(D)$ 的 ν 个向量是线性相关的。因此秩 $\boldsymbol{M}(D)\leqslant\nu-1$。

下面只需证明 $\boldsymbol{M}(D)$ 中存在 $\nu-1$ 个向量是线性无关的。实际上，我们可以证明 $\boldsymbol{M}(D)$ 的任何 $\nu-1$ 个向量线性无关。不然，可假设 $\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2,\cdots,\boldsymbol{M}_{\nu-1}$ 线性相关而不失一般性。于是必有不全为0的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_{\nu-1}$ 使得 $c_1\boldsymbol{M}_1+c_2\boldsymbol{M}_2+\cdots+c_{\nu-1}\boldsymbol{M}_{\nu-1}=0$。

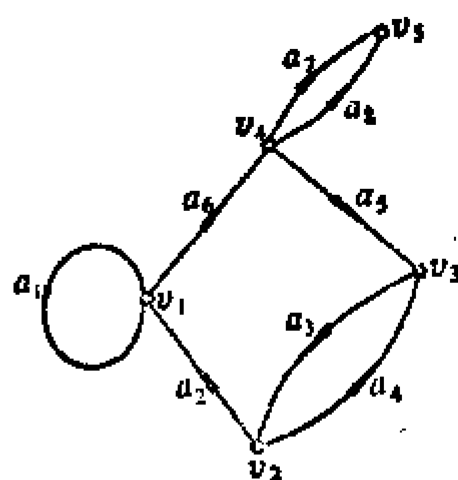
进而言之，因为D是连通的，D中不存在孤立点，所以$M_i\neq 0$，$1\leqslant i\leqslant \nu$. 因此必有$\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}\subseteq\{1,2,\cdots,\nu-1\}$，$k\geqslant 2$，使得$c_{i_1}$，$c_{i_2}\cdots$，$c_{i_k}$全不为0且$c_{i_1}M_{i_1}+c_{i_2}M_{i_2}+\cdots+c_{i_k}M_{i_k}=0$. 另一方面，设$D$中与$M_{i_1}, M_{i_2},\cdots,M_{i_k}$相对应的顶点为$v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_k}$. 因为$D$是连通的，$D$中必有一条弧，设为第$j$条弧，它的一个端点属于$\{v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_k}\}$，不妨设此端点为$v_{i_1}$，它的另一个端点不属于$\{v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_k}\}$. 于是$M_{i_1}$的第$j$个分量不等于0，而$M_{i_2},\cdots,M_{i_k}$的第$j$个分量均等于0. 又因为$c_{i_1}\neq 0$，所以线性组合$c_{i_1}M_1+c_{i_2}M_2+\cdots+c_{i_k}M_{i_k}$不可能等于0，矛盾. □

用类似的方法并注意前面所列出的$M(D)$的性质(3)，我们不难将定理 10.8 做如下推广.

定理 10.9 若ν阶有向图D有ω个连通分支，则秩$M(D)=\nu-\omega$. □

设D是一个ν阶有向图. D的邻接矩阵是一个$\nu\times\nu$矩阵，记为$A(D)=[a_{ij}]$，其中a_{ij}为D中以第i个顶点为尾、以第j个顶点为首的弧的数目(当$i=j$时，就是第i个顶点上的环的数目). 图 10.4 中给出了一个有向图D及其邻接矩阵的例子.

有向图的邻接矩阵具有下列性质.



有向图D

$$A(D)=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\\left[\begin{array}{ccccc}1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\end{array}$$

D的邻接矩阵

图 10.4

(1) $A(D)$是一个以非负整数为元素的ν阶方阵. 反之,对于任何给定的以非负整数为元素的ν阶方阵Q,可以构造一个有ν个顶点的有向图,使得$A(D)=Q$,即Q是D的邻接矩阵.

(2) $A(D)$中第i行(列)元素的和等于D中第i个顶点的出(入)度.

(3) $A(D)$中两行的对换以及对应的两列的对换,相当于D中对应的两个顶点的标号的对换. 因此,两个有向图D_1与D_2同构,当且仅当$A(D_1)$与$A(D_2)$仅有这种行与列的排列上的差别.

(4) 若Q是有向图D的邻接矩阵, 则Q的转置是有向图D的逆向图$\overleftarrow{D}$的邻接矩阵(参看习题 8.1.3).

(5) D由ω个连通分支组成,当且仅当$A(D)$可写成如下的块对角形式:

$$A(D)=\begin{bmatrix} A(D_1) & & & 0 \\ & A(D_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A(D_\omega) \end{bmatrix}$$

其中$A(D_1),A(D_2),\cdots,A(D_\omega)$是连通分支$D_1,D_2,\cdots,D_\omega$的邻接矩阵.

对于有向图的邻接矩阵$A(D)$,我们也可以定义它的幂$A^r(D)$,这里r是任意的正整数. 下面的定理与上一节中的定理10.4相似. 我们只给出定理本身,而把定理的证明留作习题.

定理 10.10 $A^r(D)$的第i行第j列的元素等于有向图D中第i个顶点到第j个顶点的不同的长度为r的有向途径的数目. □

习 题

10.2.1 证明定理 10.9.

10.2.2 证明定理 10.10.

10.2.3 设D是ν阶非空有向图，M与A分别是D的关联矩阵与邻接矩阵。设$D=(d_{ij})$是$\nu\times\nu$对角矩阵，且d_{ii}等于D的基础图的顶点v_i的度$(1\leqslant i\leqslant\nu)$。证明$MM'=D-A$。

10.3 圈空间与补圈空间

在前一节讨论有向图的关联矩阵的秩时，我们曾涉及实数域上的ε维向量空间。实际上，我们可以把ε维向量空间与有ε条弧的任一有向图D联系起来，称它为D的弧空间，并把它记为$\mathscr{A}$。于是定义在D的弧族上的任一个实值函数就是$\mathscr{A}$中的一个向量。在这一节中，我们主要讨论$\mathscr{A}$的两个子空间：圈空间和补圈空间。

设f是定义在有向图D的弧集A上的一个实值函数。如果对于每个顶点$v\in V$有

$$f^-(v)=f^+(v) \tag{10.4}$$

则称f是D中的一个环流，在(10.4)中$f^-(v)$表示v的一切入弧上的f的值的和，$f^+(v)$表示v的一切出弧上的f的值的和。我们在图10.5中给出了一个环流的例子。环流这一称谓来源于电网络。如果把D看作电网络，f在一条弧上的值看作通过该弧的电

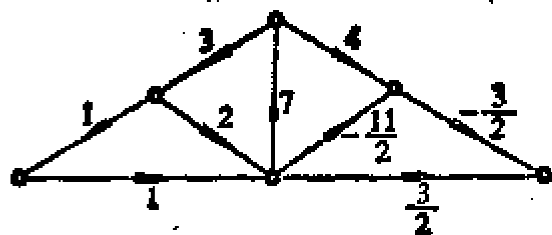


图 10.5 一个环流

流的值，那么(10.4)就表示通过D中任何一点的电流守恒，因而f表示D中的一个电流的环流。显然，任意两个环流的和，任意实数与任意环流的乘积也都满足(10.4)，因而也都是环流。因此，全体环流的集合是向量空间$\mathscr{A}$的一个子空间，我们把它记为$\mathscr{C}$。

从环流的定义不难看出，如果D中没有圈，则D中的任何环流都是零，即D中的任何环流f对任何$a\in A$均有$f(a)=0$(可参看下面的引理 10.13). 因此D中的圈对有关环流的问题有着特殊的作用. 设C是D中的一个圈并给予C一个定向，以C^+表示C中与圈的定向相一致的弧的集合. 在这种假定下，我们定义一个与圈C相联系的环流f_C:

$$f_C(a)=\begin{cases}1 & \text{当}\, a\in C^+\\ -1 & \text{当}\, a\in C\backslash C^+\\ 0 & \text{当}\, a\notin C\end{cases}$$

为了证明这样定义的f_C确实是一个环流，只需证明f_C满足(10.4). 当v不在C上时，(10.4)的两边均为0. 当v在C上时，v恰与C中的两条弧相关联，这时C的定向与两条有关的弧的方向之间的关系总共有图 10.6 中给出的四种可能. 显然，(10.4)对四种可能中的每一种均成立. 因此f_C确实是一个环流.

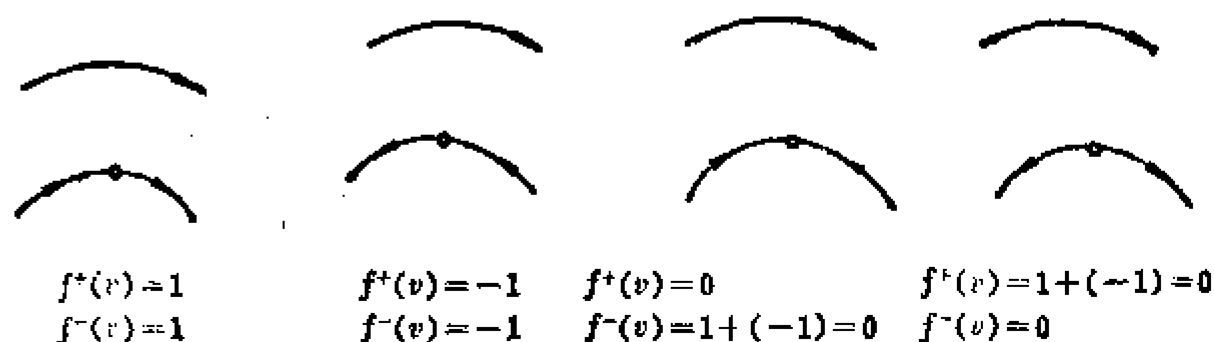


图 10.6

后面我们将会看到，每一个环流都是某些与圈相联系的环流的线性组合. 因此我们称$\mathscr{C}$为D的**圈空间**.

现在我们考虑$\mathscr{A}$上的另一类实值函数. 设g是有向图D的弧集A上的实值函数，如果存在D的顶点集V上的实函数p使得对于弧$a=(x, y)$有

$$g(a)=p(x)-p(y) \tag{10.5}$$

成立，则称g是D中的一个势差，势差这一叫法也来自电网络.

$p(v)$表示D中一点v处的势，而$g(a)$表示电网络中由a所代表的支路的两端的势差. 图 10.7 给出了一个有向图及其中的势与势差的例子.

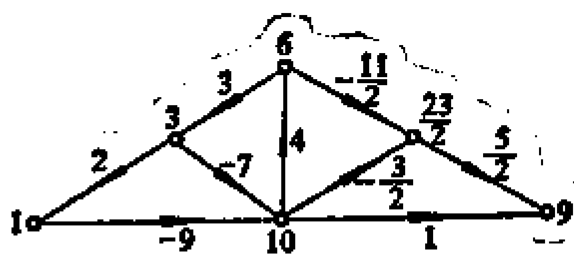


图 10.7 势和势差

显然，任意两个势差的和，任一实数与任一势差的乘积也都是势差. 因此，全体势差的集合也是向量空间$\mathscr{A}$的一个子空间，我们把它记为$\mathscr{B}$.

与环流的情形相似，对于D中的任何补圈$B=(S,\bar{S})$（参看3.3节），我们定义一个与它相联系的函数g_B：

$$g_B=\begin{cases}1 & \text{当}a\in(S,\bar{S})\\ -1 & \text{当}a\in(\bar{S},S)\\ 0 & \text{当}a\notin B.\end{cases}$$

g_B是一个势差. 为了证明这一点，只需令

$$p(v)=\begin{cases}1 & \text{当 }v\in S\\ 0 & \text{当 }v\notin S\end{cases}$$

显然，对D中的任何弧$a=(x,y)$，(10.5)式成立.

后面我们将会看到，D中任何势差都是某些与补圈相联系的势差的线性组合. 因此我们称$\mathscr{B}$为D的补圈空间.

现在我们利用前一节中介绍的关联矩阵来研究$\mathscr{B}$和$\mathscr{C}$的性质以及两者之间的关系.

定理 10.11 设M是有向图D的关联矩阵. 于是补圈空间$\mathscr{B}$是由M的行向量生成的向量空间而$\mathscr{C}$是$\mathscr{B}$的正交补.

证 设g是D中的一个势差. 根据定义，存在V上的函数p

使得对任意的弧 $a=(x,y)$，$g(a)=p(x)-p(y)$．设 $V=\{v_1, v_2,\cdots,v_v\}$，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_e\}$，并以 m_{ij} 表示 M 的第 i 行第 j 列的元素．于是对于任意的 $a_j\in A$，我们有

$$g(a_j)=\sum_{i=1}^{v}p(v_i)m_{ij}$$

这就是说，g 是 M 的行向量的线性组合．反之，M 的行向量的任何一个线性组合显然是一个势差．因此，$\mathscr{B}$ 是 M 的行向量所生成的向量空间．

假设 f 是 A 上的函数．利用上一段的记号，条件(10.4)可改写为：对任意的 $v_i\in V$，

$$\sum_{j=1}^{e}m_{ij}f(a_j)=0$$

因此，f 是 D 中的环流，当且仅当它与 M 的每一行正交．这也就是说 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{B}$ 的正交补．□

推论 10.12　若 D 有 v 个顶点，e 条弧和 ω 个连通分支，则 $\mathscr{B}$ 的维数为 $v-\omega$，$\mathscr{C}$ 的维数为 $e-v+\omega$．

证　因 $\mathscr{B}$ 的维数等于 M 的秩，而由定理 10.9，M 的秩为 $v-\omega$，所以 $\mathscr{B}$ 的维数为 $v-\omega$．又因为 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{B}$ 的正交补，所以 $\mathscr{C}$ 的维数等于 $e-v+\omega$．□

设 B 是一个矩阵，如果它的行向量组成 $\mathscr{B}$ 的一个基，则称 B 为 $\mathscr{B}$ 的一个**基矩阵**．$\mathscr{C}$ 空间的基矩阵的定义与此相似．从上面的讨论可知，若有向图 D 是连通的，则由其关联矩阵的任意 $v-1$ 行组成的矩阵是 D 的补圈空间 $\mathscr{B}$ 的一个基矩阵．现在假定已经知道 $\mathscr{B}$ 或 $\mathscr{C}$ 的一个基矩阵，由推论 10.12，这个矩阵的秩也是知道的，那么它的满秩子方阵有什么特征呢？为了讨论这个问题，我们先给出两个引理．

设 f 是 A 上的函数，我们以 $\|f\|$ 表示 A 中使 f 的值不等于 0

的元素的集合，即

$$\|f\|=\{a \mid a\in A,\quad f(a)\neq 0\}$$

引理 10.13　若 f 是 D 中的一个非零环流，则 $D[\|f\|]$ 包含圈.

证　$D[\|f\|]$ 不可能有度为 1 的顶点. 否则，设 v 的度为 1. 因为 v 与 $\|f\|$ 中唯一的一条弧相关联，而对任何 $a\in\|f\|$，f 的值不等于 0，故必有 $f^{+}(v)\neq f^{-}(v)$，与守恒条件(10.4)矛盾. 由引理 2.6，$D[\|f\|]$ 必包含圈. □

引理 10.14　若 g 是 D 的一个非零势差，则 $D[\|g\|]$ 包含补圈.

证　设对于 D 中的弧 $a=(x,y)$，$g(a)=p(x)-p(y)$. 因 g 是非零势差，$\|g\|$ 非空　设 u 是 $\|g\|$ 中某一条弧的任一个端点，令

$$U=\{v\in V \mid p(v)=p(u)\}$$

于是对任意的 $a\in[U,\overline{U}]$，$g(a)\neq 0$. 因此 $[U,\overline{U}]\subseteq\|g\|$，而由 u 的选择知 $[U,\overline{U}]$ 非空，即 $[U,\overline{U}]$ 是 D 的一个边割，从而包含一个补圈. 由此可知 $D[\|g\|]$ 包含一个补圈. □

设 $\mathbf{R}$ 是一个矩阵，它的列是以 A 中元素为标记的. 若 $S\subseteq A$，我们以 $\mathbf{R}\mid S$ 表示 $\mathbf{R}$ 中的以 S 中的元素为标记的列组成的子矩阵.

定理 10.15　设 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 分别为有向图 D 的补圈空间与圈空间　若 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 分别为 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 的基矩阵，则对任何 $S\subseteq A$，

(1) $\mathbf{B}\mid S$ 的列向量线性无关的充要条件是 $D[S]$ 不包含圈.

(2) $\mathbf{C}\mid S$ 的列向量线性无关的充要条件是 $D[S]$ 不包含补圈.

证　(1) 以 $b(a)$ 表示 $\mathbf{B}$ 中由 a 标记的列向量. 显然，$\mathbf{B}\mid S$ 线性相关的充要条件是：存在 A 上的函数 f 使得：(i) 对于至少一个 $a\in S$，$f(a)\neq 0$，(ii) 对于一切 $a\notin S$，$f(a)=0$，以及(iii)

$\sum_{a\in A} f(a)b(a)=0$. 这也就是说，$B|S$ 线性相关，当且仅当存在非零的环流 f 使得 $\|f\|\subseteq S$. 若存在这样的环流，则由引理 10.13 知，$D[S]$ 包含圈. 反之，若 $D[S]$ 包含一个圈 C，则 f_c 是一个环流，它使得 $\|f_c\|=C\subseteq S$. 由此即得，当且仅当 $D[S]$ 不包含圈时 $B|S$ 线性无关.

(2) 的证明与(1)完全相似，我们把它作为习题留给读者. □

习　题

10.3.1　证明定理 10.15(2).

10.4　图的支撑树数

在这一节里，我们将利用上一节中关于圈空间与补圈空间的基矩阵的结果，求图的支撑树数. 为此，我们先介绍圈空间与补圈空间的两个特殊的基矩阵.

设 D 是一个有向图，具有 ν 个顶点，ε 条弧和 ω 个连通分支. 设 F 是 D 的一个支撑林，$\overline{F}$ 是 F 的补林. 若 a 是 $\overline{F}$ 中的一条弧，则 $F+a$ 包含一个唯一的圈(参看定理 3.11)，记为 C_a 并给予一个定向，使之与 a 的方向一致. 于是与 C_a 相联系的环流满足 $f_a(a)=1$. 以所有与 $\overline{F}$ 中的弧相联系的 $\varepsilon-\nu+\omega$ 个环流为行向量的矩阵 $\mathbf{C}$ 是 D 的圈空间 $\mathscr{C}$ 的一个基矩阵. 这是因为，一方面 $\mathbf{C}$ 的每一行是一个环流，另一方面，在 $\overline{F}$ 中的弧的适当标号下，$\mathbf{C}|\overline{F}$ 是一个单位矩阵，从而秩 $\mathbf{C}=\varepsilon-\nu+\omega=\mathscr{C}$ 的维数. 我们把 $\mathbf{C}$ 称为**对应于 F 的基矩阵**. 完全类似，若 a 是 F 的一条弧，则 $\overline{F}+a$ 包含一个唯一的补圈 (参看定理 3.12)，记为 B_a 并以 g_a 表示与 B_a 相联系的并且满足 $g_a(a)=1$ 的势差. 于是以所有的与 F 中的弧相联系的 $\nu-\omega$ 个势差为行向量的矩阵 $\mathbf{B}$ 是 D 的补圈空间 $\mathscr{B}$

的一个基矩阵，我们称之为$\mathscr{B}$的对应于F的基矩阵．至此，我们分别给出了$\mathscr{C}$与$\mathscr{B}$的一个特殊的基矩阵，同时也可以再一次看出分别称$\mathscr{C}$与$\mathscr{B}$为圈空间和补圈空间的理由．

下面我们假定G是连通图，T是G的一个给定的支撑树，D是G的一个定向，$\boldsymbol{B}$是D的补圈空间$\mathscr{B}$的对应于T的基矩阵．由定理10.15知，若S是D的弧集A的一个子集且$|S|=\nu-1$，则$\boldsymbol{B}|S$是非奇异矩阵的充分必要条件是：S在G中生成一个支撑树．于是G的支撑树的数目就等于$\boldsymbol{B}$的阶为$\nu-1$的非奇异的子矩阵的数目．

一个$r\times s$矩阵的满阶子方阵是指它的一个阶为$\min\{r,s\}$的子方阵．一个矩阵称为幺模的，如果它的任何一个满阶子方阵的行列式等于0，1，或-1．

定理 10.16 $\boldsymbol{B}$是幺模的．

证 设$\boldsymbol{P}$是$\boldsymbol{B}$的满阶子方阵，且$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}|T_1$．若$T_1$不是树，则由定理10.15知$\det\boldsymbol{P}=0$．现在假设$T_1$是树，而$\boldsymbol{B}_1$是$\mathscr{B}$的对应于$T_1$的基矩阵．由于$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{B}_1$均为$\mathscr{B}$的基矩阵，必存在$\nu-1$阶方阵$\boldsymbol{A}$使得$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_1$，从而$\boldsymbol{B}|T_1=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_1|T_1)$．但$\boldsymbol{B}_1|T_1$是单位矩阵，故$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}|T_1$．因此

$$(\boldsymbol{B}|T_1)=\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}$$

将上式的两边限制于T上，即得

$$(\boldsymbol{B}|T_1)(\boldsymbol{B}_1|T)=\boldsymbol{B}|T$$

又因$\boldsymbol{B}|T$是单位矩阵，我们有

$$\det(\boldsymbol{B}|T_1)\det(\boldsymbol{B}_1|T)=1 \qquad (10.6)$$

由于(10.6)中的两个行列式均为整数矩阵的行列式，它们本身也必是整数，从而$\det(\boldsymbol{B}|T_1)=\pm1$．□

定理 10.17 若以$\tau(G)$表示G的支撑树的数目，则$\tau(G)=\det\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'$．其中$\boldsymbol{B}'$为$\boldsymbol{B}$的转置．

证 由关于矩阵乘积行列式的比内-柯西(Binet-Cauchy)定

理知

$$\det BB' = \sum_{\substack{S \subseteq A \\ |S| = \nu - 1}} (\det(B|S))^2 \tag{10.7}$$

根据定理 10.15,(10.7)右端的非零项的个数就是 G 中的不同的支撑树的数目,而由定理 10.16,每个非零项恰等于 1 . 所以 $\tau(G) = \det BB'$. □

用完全类似的办法可证明,若 $\boldsymbol{C}$ 是 D 的圈空间 $\mathscr{C}$ 的对应于 T 的基矩阵,则 $\boldsymbol{C}$ 是幺模的,且

$$\tau(G) = \det CC' \tag{10.8}$$

推论 10.18 $\quad \tau(G) = \det\begin{bmatrix} B \\ \hline C \end{bmatrix}$

证 由(10.7)和(10.8)两式得

$$(\tau(G))^2 = \det BB' \det CC' = \det\left[\begin{array}{c|c} BB' & 0 \\ \hline 0 & CC' \end{array}\right]$$

因 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 是正交的,我们有 $BC' = CB' = 0$,从而

$$(\tau(G))^2 = \det\left[\begin{array}{c|c} BB' & BC' \\ \hline CB' & CC' \end{array}\right] = \det\left(\begin{bmatrix} B \\ \hline C \end{bmatrix} [B' | C']\right)$$

$$= \det\begin{bmatrix} B \\ \hline C \end{bmatrix} \det[B' \mid C'] = \left(\det\begin{bmatrix} B \\ \hline C \end{bmatrix}\right)^2$$

两边开方即得所要证明的结果.

最后,由定理 10.8 知,从 D 的关联矩阵 $\boldsymbol{M}$ 中删去任一行后所得到的矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是 $\mathscr{B}$ 的基矩阵,同时不难证明 $\boldsymbol{K}$ 是幺模的. 因此,对于这样的 $\boldsymbol{K}$,也有

$$\tau(G) = \det KK'$$

这就是所谓矩阵-树定理, 实际上这一结果早在 1847 年就已由克希霍夫(G.Kirchhoff)得到.

习　题

10.4.1　证明(10.8)式.

10.4.2　证明 $\tau(K_n)=n^{n-2}$.

10.4.3　证明 $\tau(K_{r,s})=r^{s-1}s^{r-1}$.

参考文献

Kirchhoff, G. (1847). Über die Auflösung der Gleichungen, Auf Welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanisher Ströme geführt wird, *Ann. Phys. Chem.*, **72**, 497—508

[illegible]

[illegible]

[illegible]